УДК 378 **DOI: 10.34670/AR.2022.82.88.092**

Обучение элементам математического моделирования будущих учителей математики

Бакашева Аймани Бураевна

Кандидат педагогических наук,
доцент кафедры математического анализа,
Чеченский государственный педагогический университет,
364037, Российская Федерация, Грозный, ул. Субры Кишиевой, 33;
e-mail: bakasheva.63@mail.ru

Исаева Зарема Имрановна

Кандидат педагогических наук,
доцент кафедры геометрии и методики преподавания математики,
Чеченский государственный педагогический университет,
364037, Российская Федерация, Грозный, ул. Субры Кишиевой, 33;
e-mail: zarema_isaeva95@mail.ru

Батаева Яха Данилсултановна

Кандидат педагогических наук,
доцент кафедры геометрии и методики преподавания математики,
Чеченский государственный педагогический университет,
364037, Российская Федерация, Грозный, ул. Субры Кишиевой, 33;
e-mail: iaha72@mail.ru

Аннотация

В статье выявляются особенности математического моделирования и рассматриваются динамичные модели, т. е. модели, которые постоянно уточняются, обновляются в зависимости от варьирования моделируемого явления. Приводятся и разбираются решения задач методом математического моделирования, а затем даются дополнительные задания, которые помогут сформировать у студентов представление о развитии и уточнении построенной математической модели. Делается вывод о том, что метод математического моделирования способствует дополнению учебной работы студентов поисковой деятельностью, формирует такие приемы интеллектуальной деятельности, как анализ, синтез, абстрагирование, и помогает развить математическое мышление. Задачи и дополнительные задания к ним помогают студентам работать с динамичными моделями. Эти задания позволяют акцентировать внимание студентов на динамическом характере математической модели, выработать первоначальные навыки ее уточнения.

Для цитирования в научных исследованиях

Бакашева А.Б., Исаева З.И., Батаева Я.Д. Обучение элементам математического моделирования будущих учителей математики // Педагогический журнал. 2022. Т. 12. № 3А. С. 803-809. DOI: 10.34670/AR.2022.82.88.092

Ключевые слова

Математическая модель, моделирование, динамичность, уточнение модели, наибольшее значение, наименьшее значение.

Введение

Особая задача, стоящая перед математикой, – задача математического развития, которая является фундаментом развития человеческого мышления. Чтобы успешно решить эту задачу, пользуются методом математического моделирования – важнейшим способом научного познания и главным средством для активизации учебной деятельности.

Часто и эффективно методы математического моделирования используются при решении текстовой задачи – это основной вид для учебных заданий в школьных программах. При использовании метода формируется логическое и абстрактное мышление, появляются умения выделять главное, обобщать и делать правильные выводы, развиваются творческие способности ученика. Моделирование – это научный, прогрессивный и доступный способ получения знаний [Малков и др., 2018, 21].

Основная часть

С математическим моделированием знакомятся еще в начальной школе. Почти каждая текстовая задача решается математическим моделированием. В школьных учебниках задачи на построение математической модели приводят лишь к построению статичных моделей, в то время как в реальной жизни приходится решать задачи, приводящие к динамичным моделям, т. е. моделям, которые постоянно уточняются, обновляются в зависимости от варьирования моделируемого явления. И будущим учителям необходимо не только составлять математические модели к типичным задачи и решать их, но и уметь работать с динамичными моделями [Алимов и др., 2016, 156].

Для того чтобы обучить студентов элементам динамичного математического моделирования, необходимо предложить следующий алгоритм:

1) решить типичную задачу методом математического моделирования;
2) дать к ним дополнительные задания, которые помогут сформировать у студентов представление о развитии и уточнении построенной математической модели;
3) решить задачу с уточненной математической моделью.

Покажем все это на примерах, для чего рассмотрим несколько задач по теме «Наибольшее и наименьшее значения функции».

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Необходимо огородить участок прямоугольной формы сеткой длиной 100 метров. Найдите размеры участка, чтобы его площадь была наибольшей.

Решение. Обозначим одну из сторон прямоугольника через x м, тогда другая сторона будет иметь длину (50–x) м.

Площадь $S(x)$ прямоугольника мы вычислим по формуле:

$$S(x) = x(50 - x) = 50x - x^2, \text{ где } x \epsilon [0; 50].$$

Исследуем полученную функцию, для этого находим ее производную:

$$S'(x) = 50 - 2x,$$

Находим критические точки:

$$S'(x) = 0, 50 - 2x = 0, x = 25.$$

Находим значения функции на концах отрезка и критической точке:

$$S(0) = 0$$

$$S(25) = 25 \cdot (50 - 25) = 625$$

$$S(50) = 25 \cdot (50 - 50) = 0$$

Наибольшее значение $S(x) = 625$ функция имеет при $x = 25$.

Итак, максимальную площадь $S(x) = 400$ ($м^2$) имеет участок формы 25×25 м.

А теперь попробуем обратить внимание студентов на возможную динамичность процесса математического моделирования. Что для этого мы делаем? Введем дополнительные условия, которые соответствуют реальной жизни, например: «Участок может находиться не на открытом месте, а около каких-либо построек. Какие возможны случаи ограждения участка?»

Возможны два случая:

– участок примыкает одной стороной к постройке, т. е. одна сторона уже огорожена и имеющуюся сетку надо распределить для ограждения трех других сторон;
– участок примыкает двумя сторонами к постройкам, т. е. две стороны уже огорожены и имеющуюся сетку надо распределить для ограждения двух других сторон.

Рассмотрим первый случай.

Пусть x – длина стороны, не примыкающей к постройке, тогда другая имеет длину

$$(100 - 2x) = 2(50 - x).$$

Площадь участка выражается тогда формулой:

$$S(x) = 2x(50 - x) = 100x - 2x^2.$$

Исследуя эту функцию, мы получим, что максимальную площадь $S(x) = 1250$ ($м^2$) будет имеет участок размера 25×50 м, где длина примыкающей стороны равна 50 м.

Второй случай можно дать студентам на самостоятельную работу, а потом разобрать у доски.

Если обозначить через x длину одной стороны, то длина другой будет равняться $(100 - x)$ и формула для площади будет иметь вид:

$$S(x) = x(100 - x)$$

Максимальную площадь $S(x) = 2500$ ($м^2$) имеет участок размера 50×50 м.

Возможны и другие случае ограждения участка, которые можно также рассмотреть.

После решения этой задачи следует обратить внимание студентов на особенности математического моделирования, одна из которых заключается в сопоставлении модели с тем явлением, которое описывает эта модель. Такое сопоставление учитывает какие-то новые моменты в составленной модели, что позволяет ее уточнить.

Решение таких задач необходимо сопровождать схемой или рисунком, так как это позволяет выявить возможные случаи и тем самым уточнить модель [Чаплыгин, 2000].

Перейдем к более сложной задаче.

Задача 2. При движении теплохода по озеру расходы Q в рублях на 1 км пути определяются по формуле $Q(v) = 0{,}001v^3 + \frac{60}{v}$, где v – скорость теплохода (в км/ч). Найдите скорость теплохода, при которой расходы будут наименьшими.

Решение. Исследуем функцию с помощью производной:

$$Q'(v) = 0{,}003v^2 - \frac{60}{v^2}$$

Находим критические точки: $Q'(v) = 0$, $0{,}003v^2 - \frac{60}{v^2} = 0$

Решая полученной уравнение, мы получаем $v \approx 12$ км/ч.

Наименьшее значение функции на интервале $(0; \infty)$ равно:

$$Q(v) = Q(12) \approx 6{,}73$$

Итак, расходы будут минимальными при скорости теплохода $v \approx 12$ км/ч.

Опять обращаем внимание студентов на возможную динамичность построенной математической модели. Пусть теплоход движется по реке.

Здесь тоже возможны два случая:

1) движение по течению реки;
2) движение против течения реки.

Имеется формула, которая показывает, что расходы при движении по реке изменяются на величину, которая пропорциональна скорости движения теплохода:

$$Q(v) = 0{,}001v^3 + \frac{60}{v} + kv,$$

где k – коэффициент пропорциональности, который берется со знаком «-» при движении по течению реки и со знаком «+» при движении против течения реки.

Рассмотрим первый случай.

Дополнительное задание: «Найдите значение k и определите скорость теплохода по течению реки, при которой расходы будут минимальными».

Для определения k используем начальные условия: $Q(20) = 5$ руб/км. При скорости теплохода 20 км/ч расходы равны 5 рублям на 1 км.

Подставляя начальные условия в формулу, мы имеем:

$$0{,}001 \cdot 20^3 + \frac{60}{20} - k \cdot 20 = 5$$

Отсюда находим $k = 0{,}3$.

Теперь мы уточнили математическую модель:

$$Q(v) = 0{,}001v^3 + \frac{60}{v} - 0{,}3v.$$

Исследовав полученную функцию с помощью производной, находим критическую точку $v = 14{,}14$.

В результате мы получаем, что минимальные расходы теплохода $Q(v) = 2{,}8$ рубля на 1 км при скорости $v = 14{,}14$ км/ч.

Второй случай можно предложить студентам выполнить самостоятельно, а затем разобрать всем классом у доски.

Дополнительное задание: «Найдите значение k и определите скорость теплохода против течения реки, при которой расходы будут минимальными».

Для определения k используем начальные условия: $Q(20) = 12{,}2$ руб/км. При скорости теплохода 20 км/ч расходы равны 12,2 рубля на 1 км.

Подставляя начальные условия в формулу, мы имеем:

$$0{,}001 \cdot 20^3 + \frac{60}{20} + k \cdot 20 = 12{,}2$$

Отсюда находим $k = 0{,}06$.

Теперь мы уточнили математическую модель:

$$Q(v) = 0{,}001v^3 + \frac{60}{v} + 0{,}06v.$$

Студенты должны получить следующий результат: минимальные расходы теплохода $Q(v) = 7{,}4$ рубля на 1 км при скорости $v = 11{,}4$ км/ч.

Студентам также можно порекомендовать:

– сравнить скорости, соответствующие различным условиям движения теплохода;

– сравнить математические модели, описывающие расходы с учетом особенностей течения реки.

После этого необходимо обратить внимание студентов на то, что учет влияния на расходы таких факторов, как скорость ветра, особенности русла реки, швартовки к пристани и т. п., требует более тонкого математического инструментария.

Одним из видов проверки математической модели на адекватность описания процесса является проверка совпадения физических размерностей величин, которые входят в формулу. Поэтому можно предложить студентам следующее упражнение: «Какова должна быть физическая размерность коэффициента *k*, чтобы формула правильно описывала расходы на 1 км плавания?»

Заключение

Метод математического моделирования способствует дополнению учебной работы студентов поисковой деятельностью, формирует такие приемы интеллектуальной деятельности, как анализ, синтез, абстрагирование, и помогает развить математическое мышление. Задачи и дополнительные задания к ним помогают студентам работать с динамичными моделями. Эти задания позволяют акцентировать внимание студентов на динамическом характере математической модели, выработать первоначальные навыки ее уточнения.

Библиография

1. Алимов Ш.А. и др. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы (базовый уровень). М., 2016. 464 с.
2. Малков И.А. и др. Моделирование и модели в деятельности учителя и ученика. Смоленск, 2018. 96 с.
3. Чаплыгин В.Ф. Некоторые методические соображения по решению текстовых задач // Математика в школе. 2000. № 4. С. 28-31.
4. Абулова М.О. Смешанная задача для одного уравнения четвертого порядка// Материалы республиканская конференция «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения» Ташкент 15-17 декабрь 2017 г
5. Паночевный П.Н., Ли А.А. Применение цифровых образовательных ресурсов и аналитических платформ (приложений) для совершенствования качества обучения в ВУЗе// Образование и право. №2. 2022. 261-266 с.
6. Ушаков А.В. Об изучении свойств параллельного проектирования в педагогическом ВУЗе // Педагогические науки. 2008. № 4 (31). С. 140 – 144.
7. Ушаков А.В. О роли примеров на лекциях по топологии в педагогическом ВУЗе // Педагогические науки. 2012. № 3 (54). С. 74 – 84.
8. Ушаков А.В. О роли примеров на лекциях по дифференциальной геометрии в педагогическом ВУЗе // Педагогические науки. 2014. № 3 (66). С. 31 – 34.
9. Ноздрина Н.А. Информационное обеспечение системы дидактического управления колледжами технического профиля в России// Педагогический журнал. 2019. Т. 9. № 1-1. С. 202-209.
10. Ноздрина Н.А. Онтологические компоненты моделирования системы дидактического управления колледжами технического профиля// Педагогический журнал. 2020. Т. 10. № 6-1. С. 273-279.

Teaching elements of mathematical modeling to future mathematics teachers

Aimani B. Bakasheva

PhD in Pedagogy,
Associate Professor at the Department of mathematical analysis,
Chechen State Pedagogical University,
364037, 33 Subry Kishievoi str., Grozny, Russian Federation;
e-mail: bakasheva.63@mail.ru

Zarema I. Isaeva

PhD in Pedagogy,
Associate Professor at the Department of geometry and methods of teaching mathematics,
Chechen State Pedagogical University,
364037, 33 Subry Kishievoi str., Grozny, Russian Federation;
e-mail: zarema_isaeva95@mail.ru

Yakha D. Bataeva

PhD in Pedagogy,
Associate Professor at the Department of geometry and methods of teaching mathematics,
Chechen State Pedagogical University,
364037, 33 Subry Kishievoi str., Grozny, Russian Federation;
e-mail: iaha72@mail.ru

Abstract

The article aims to identify the features of mathematical modeling and to consider dynamic models, i. e. models that are constantly being refined and updated depending on the variation of the phenomenon being modeled. It pays attention to the fact that there exists the task of mathematical development, which is a basis for the development of human thinking. People use the method of mathematical modeling – the most important way of scientific knowledge and the main means for activating educational activities – to successfully solve this problem. The authors of the article make an attempt to carry out an analysis of solutions to problems by the method of mathematical modeling, and then to describe additional tasks that will help students form an idea of the development and refinement of the constructed mathematical model. They come to the conclusion that the method of mathematical modeling contributes to the complementation of students' academic work with search activities, forms such methods of intellectual activities as analysis, synthesis, abstraction, and helps to develop mathematical thinking. Tasks and additional tasks help students to work with dynamic models. These tasks allow students to focus on the dynamic nature of the mathematical model, to develop the initial skills of its refinement.

For citation

Bakasheva A.B., Isaeva Z.I., Bataeva Ya.D. (2022) Obuchenie elementam matematicheskogo modelirovaniya budushchikh uchitelei matematiki [Teaching elements of mathematical modeling to future mathematics teachers]. *Pedagogicheskii zhurnal* [Pedagogical Journal], 12 (3A), pp. 803-809. DOI: 10.34670/AR.2022.82.88.092

Keywords

Mathematical model, modeling, dynamism, model refinement, highest value, lowest value.

References

1. Alimov Sh.A. et al. (2016) *Algebra i nachala matematicheskogo analiza. 10-11 klassy (bazovyi uroven')* [Algebra and the principles of mathematical analysis. Grades 10-11 (the basic level)]. Moscow.
2. Chaplygin V.F. (2000) Nekotorye metodicheskie soobrazheniya po resheniyu tekstovykh zadach [Some methodological considerations for solving word problems]. *Matematika v shkole* [Mathematics in school], 4, pp. 28-31.
3. Malkov I.A. et al. (2018) *Modelirovanie i modeli v deyatel'nosti uchitelya i uchenika* [Modeling and models in the activities of teachers and schoolchildren]. Smolensk.
4. Abulova M.O. Mixed problem for one equation of the fourth order // Proceedings of the republican conference "Actual problems of differential equations and their applications" Tashkent December 15-17, 2017
5. P. N. Panochevny, A. A. Li. The use of digital educational resources and analytical platforms (applications) to improve the quality of education at the university// Education and Law. No. 2. 2022. 261-266 p.
6. Ushakov A.V. On the study of the properties of parallel design in a pedagogical university // Pedagogical sciences. 2008. No. 4 (31). pp. 140 - 144.
7. Ushakov A.V. On the role of examples in lectures on topology in a pedagogical university // Pedagogical sciences. 2012. No. 3 (54). pp. 74 - 84.
8. Ushakov A.V. On the role of examples in lectures on differential geometry in a pedagogical university // Pedagogical sciences. 2014. No. 3 (66). pp. 31 – 34.
9. Nozdrina N.A. Information support of the system of didactic management of technical colleges in Russia// Pedagogical magazine. 2019. V. 9. No. 1-1. pp. 202-209.
10. Nozdrina N.A. Ontological components of modeling the system of didactic management of technical colleges// Pedagogical journal. 2020. Vol. 10. No. 6-1. pp. 273-279.