УДК 37

Использование метода рационализации при решении неравенств профильного ЕГЭ по математике

Демина Татьяна Юрьевна

Доцент,
кафедра высшей математики,
Российский государственный аграрный университет им. К.А. Тимирязева,
27550, Российская Федерация, Москва, ул. Тимирязевская, 49;
e-mail: tatdemina@mail.ru

Демин Виктор Вадимович

Учитель математики,
Средняя общеобразовательная школа № 218,
127434, Российская Федерация, Москва, шоссе Дмитровское, 5-а;
e-mail: demin-viktor@mail.ru

Иванцова Наталья Николаевна

Кандидат технических наук,
доцент кафедры высшей математики,
Российский государственный аграрный университет им. К.А. Тимирязева,
27550, Российская Федерация, Москва, ул. Тимирязевская, 49;
e-mail: kozuch75@mail.ru

Аннотация

В данной статье исследуется проблема совершенствования подготовки в ЕГЭ по математике. В результате исследования показано, что решение неравенств представляет собой существенные затруднения. Вариант профильного ЕГЭ по математике содержит задание повышенного уровня сложности, которое требует от учащегося умения решать неравенства различного вида. Это задание можно решить различными методами. Мы хотим обратить внимание на метод рационализации (метод декомпозиции, метод замены множителей).

Представленный в работе метод не является универсальным, но одно из важных его преимуществ – это сведение неравенств разного вида к рациональным и дробно-рациональным неравенствам, которые школьники решают более уверенно.

Представленные в данной статье результаты позволяют усовершенствовать инструменты и методы подготовки к решению ЕГЭ по математике (профильной части).

Для цитирования в научных исследованиях

Демина Т.Ю., Демин В.В., Иванцова Н.Н. Использование метода рационализации при решении неравенств профильного ЕГЭ по математике // Педагогический журнал. 2019. Т. 9. № 3А. С. 439-445.

Ключевые слова

Решение ЕГЭ, преподавание математики, решение неравенств, подготовка ЕГЭ, профильный уровень ЕГЭ

Введение

Вариант профильного ЕГЭ по математике содержит задание повышенного уровня сложности, которое требует от учащегося умения решать неравенства различного вида. Это задание можно решить различными методами. Мы хотим обратить внимание на метод рационализации (метод декомпозиции, метод замены множителей).

Основное содержание

Суть этого метода состоит в замене более сложного выражения ***A*** на более простое выражение ***B***, при которой неравенство ***B*** $\vee$ 0 равносильно неравенству ***A*** $\vee$ 0, с учетом области определения выражения ***A***.

Предлагаем некоторые выражения ***A*** и соответствующие им рационализирующие выражения ***B*** (m, f, g – выражения, содержащие переменную или числа, удовлетворяющие области определения соответствующих функций).

№	Выражение **A**	Выражение **B**
1	$\log_m f - \log_m g$	$(m-1)(f-g)$
2	$\log_m f$	$(m-1)(f-1)$
3	$m^f - m^g$	$(m-1)(f-g)$
4	$\lvert f\rvert - \lvert g\rvert$	$f^2 - g^2$

Продемонстрируем применение метода рационализации на нескольких примерах решения неравенств, соответствующих заданиям профильного ЕГЭ по математике.

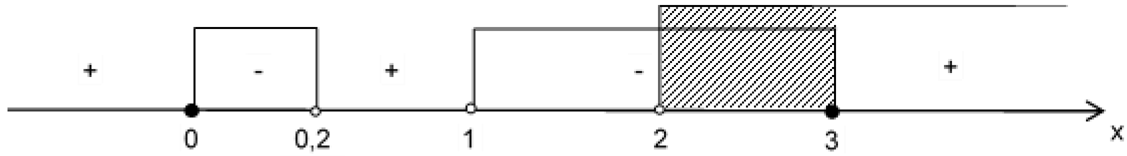
Пример 1. Решите неравенство

$$\frac{\log_5(2x+1)\cdot\log_3(x-2)}{\log_2(5x)\cdot\log_{0,2}x}\geq 0.$$

Данное неравенство не требует преобразований, т.к. в левой части неравенства присутствует разложение на множители, а в правой – ноль. Применим метод рационализации:

$$\begin{cases}\dfrac{(5-1)(2x+1-1)(3-1)(x-2-1)}{(2-1)(5x-1)(0,2-1)(x-1)}\geq 0\\ 2x+1>0\\ 5x>0\\ x-2>0\\ x>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\dfrac{20x\cdot(x-3)}{(5x-1)(x-1)}\leq 0\\ x>2\end{cases}$$

Воспользуемся методом интервалов для решения системы неравенств:



Ответ: $(2;3]$.

Пример 2. Решите неравенство

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}} x^2 \geq \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(3-2x).$$

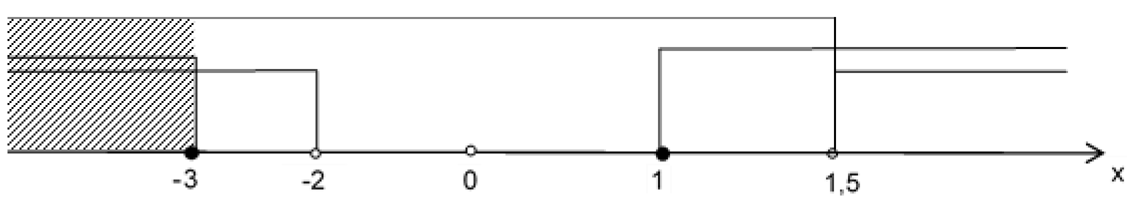
Рассмотрим решение данного неравенства двумя способами: рассмотрением возможных случаев и методом рационализации.

1-й способ: рассмотрение возможных случаев

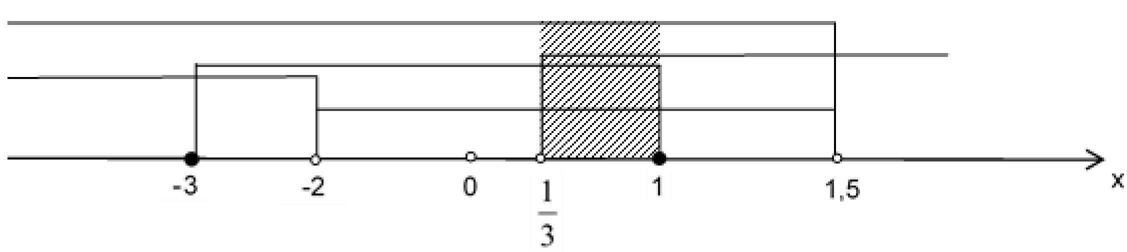
В данном неравенстве основанием логарифма является алгебраическое выражение, которое, на основании определения логарифма и свойств логарифмической функции, определяет два возможных случая:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+2} > 1 \\ x^2 \geq 3-2x \\ x^2 > 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < \dfrac{3x-1}{x+2} < 1 \\ x^2 \leq 3-2x \\ x^2 > 0 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \dfrac{2x-3}{x+2} > 0 \\ (x+3)(x-1) \geq 0 \\ x \neq 0 \\ x < 1{,}5 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} \dfrac{3x-1}{x+2} > 0 \\ (x+3)(x-1) \leq 0 \\ x \neq 0 \\ x < 1{,}5 \\ \dfrac{2x-3}{x+2} < 0 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Воспользуемся методом интервалов для решения системы условий (1) полученной совокупности:



Проведем аналогичные рассуждения для решения системы условий (2) полученной совокупности:



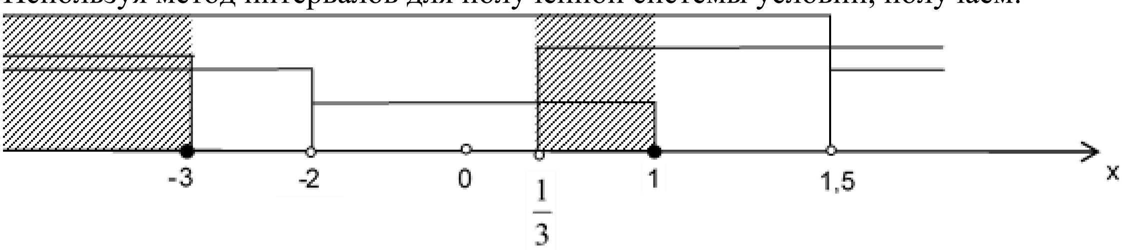
Объединяя решения полученных систем, получаем окончательный ответ: $(-\infty;-3]\cup\left(\frac{1}{3};1\right]$.

2-й способ: метод рационализации

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}} x^2 \ge \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(3-2x)$$

$$\log_{\frac{3x-1}{x+2}} x^2 - \log_{\frac{3x-1}{x+2}}(3-2x) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3x-1}{x+2}-1\right)\left(x^2-(3-2x)\right)\ge 0 \\ x^2>0 \\ 3-2x>0 \\ \frac{3x-1}{x+2}>0 \\ \frac{3x-1}{x+2}\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(2x-3)(x+3)(x-1)}{x+2}\ge 0 \\ x\ne 0 \\ x<1{,}5 \\ x\in(-\infty;-2)\cup\left(\frac{1}{3};+\infty\right) \end{cases}$$

Используя метод интервалов для полученной системы условий, получаем:



Ответ: $(-\infty;-3]\cup\left(\frac{1}{3};1\right]$.

Пример 3. Решите неравенство:

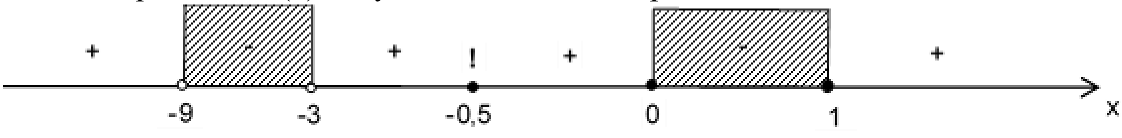
$$\frac{\left(9^{x^2}-\frac{1}{3^x}\right)\cdot\log_5\left(2x^2-x\right)}{|x+6|-3}\le 0$$

Преобразуем данное неравенство и применим метод рационализации:

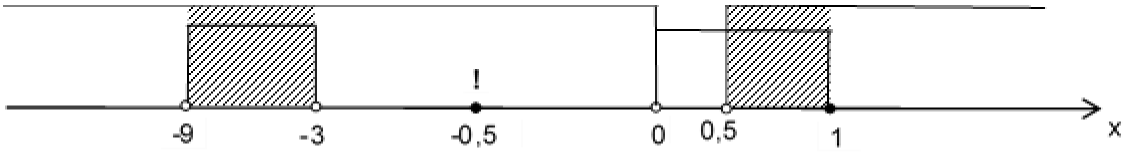
$$\frac{\left(3^{2x^2}-3^{-x}\right)\cdot\left(\log_5\left(2x^2-x\right)-\log_5 1\right)}{|x+6|-3}\le 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3-1)\left(2x^2-(-x)\right)(5-1)\left(2x^2-x-1\right)}{(x+6)^2-3^2}\le 0 \\ 2x^2-x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{8x(2x+1)\cdot 2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-1)}{(x+3)(x+9)}\le 0 \\ x(2x-1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{8x(2x+1)^2(x-1)}{(x+3)(x+9)}\le 0 & (1) \\ x\in(-\infty;0)\cup(0{,}5;+\infty) & (2) \end{cases}$$

Решим неравенство (1) полученной системы неравенств:



С учетом условия (2) данной системы неравенств, окончательно получаем:



Ответ: $(-9;-3)\cup\{-0{,}5\}\cup(0{,}5;1]$.

Заключение

В заключении хотим отметить, что этот метод не является универсальным, но одно из важных его преимуществ – это сведение неравенств разного вида к рациональным и дробно-рациональным неравенствам, которые школьники решают более уверенно.

Библиография

1. Гусятников В. Н. и др. Взаимосвязь результатов ЕГЭ и уровня освоения математики в высшем учебном заведении //Стандарты и мониторинг в образовании. – 2010. – №. 6. – С. 40-43.
2. Хавенсон Т. Е., Соловьева А. А. Связь результатов Единого государственного экзамена и успеваемости в вузе // Вопросы образования. – 2014. – №. 1.
3. Монахов В. В. Анализ результатов ЕГЭ по математике и физике и интернет-олимпиады по физике // Компьютерные инструменты в образовании. – 2011. – №. 1.
4. Бабенко А. С., Марголина Н. Л., Матыцина Т. Н. Особенности подготовки экспертов по проверке заданий с развернутым ответом единого государственного экзамена по математике // Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2016. – Т. 22. – №. 3.
5. Бабенко А. С., Марголина Н. Л., Матыцина Т. Н. Анализ структуры заданий единого государственного экзамена по математике за 2016 год по Костромской области //Вестник Костромского государственного университета. Серия: Педагогика. Психология. Социокинетика. – 2016. – Т. 22. – №. 4.
6. Мацута В. В., Богомаз С. А., Суднева О. Ю. Роль интеллектуальных и личностных факторов в достижении высокой результативности в ЕГЭ по математике //Сибирский психологический журнал. – 2014. – №. 52.
7. Кисельников И. В. Методический анализ результатов Единого государственного экзамена по математике профильного уровня в 2015 году в Алтайском крае //Современные проблемы науки и образования. – 2015. – №. 5. – С. 406-406.
8. СПбГУ О. А. И. ЕГЭ и результаты первого семестра обучения //Математика в школе. – 2011. – №. 5. – С. 28-33.
9. Ященко И. В., Семенов А. В., Высоцкий И. Р. Методические рекомендации для учителей, подготовленные на основе анализа типичных ошибок участников ЕГЭ 2015 года по математике //М.: ФИПИ. – 2015.
10. Польдин О. В. Прогнозирование успеваемости в вузе по результатам ЕГЭ //Прикладная эконометрика. – 2011. – №. 1 (21).

Using the method of rationalization in solving inequalities of the profile exam in mathematics

Tat'yana Yu. Demina

Associate Professor,
Department of Higher Mathematics,
Russian State Agrarian University named after K.A. Timiryazev,
27550, 49, Timiryazevskaya st., Moscow, Russian Federation;
e-mail: tatdemina@mail.ru

Viktor V. Demin

Teacher,
Middle School of General Education No. 218,
127434, 5-a, Dmitrovskoe highway, Moscow, Russian Federation;
e-mail: demin-viktor@mail.ru

Natal'ya N. Ivantsova

PhD in Technical Science,
Associate Professor, Department of Higher Mathematics,
Russian State Agrarian University named after K.A. Timiryazev,
27550, 49, Timiryazevskaya st., Moscow, Russian Federation;
e-mail: kozuch75@mail.ru

Abstract

This article explores the problem of improving the preparation of the exam in mathematics. As a result of the study, it is shown that the solution of inequalities is a significant difficulty. A variant of the specialized exam in mathematics contains a task of an increased level of complexity, which requires the student to be able to solve inequalities of various kinds. This task can be solved by various methods. We want to pay attention to the rationalization method (decomposition method, method of replacing factors).

The method presented in the work is not universal, but one of its important advantages is the reduction of inequalities of various types to rational and fractional rational inequalities, which students solve more confidently.

The results presented in this article allow us to improve the tools and methods of preparation for the solution of the exam in mathematics (profile part).

For citation

Demina T.Yu., Demin V.V., Ivantsova N.N. (2019) Ispol'zovaniye metoda ratsionalizatsii pri reshenii neravenstv profil'nogo YEGE po matematike [Using the method of rationalization in solving inequalities of the profile exam in mathematics].*Pedagogicheskii zhurnal* [Pedagogical Journal], 9 (3A), pp. 439-445.

Keywords

Soluteion of the exam, teaching mathematics, solving inequalities, preparation of the exam, profile level of exam

References

1. Gusyatnikov, V. N., Mitrofanov, A. YU., D'yakova, T. V., & Nosova, Ye. G. (2010). Vzaimosvyaz' rezul'tatov YEGE i urovnya osvoyeniya matematiki v vysshem uchebnom zavedenii. Standarty i monitoring v obrazovanii, (6), 40-43.
2. Khavenson, T. Ye., & Solov'yeva, A. A. (2014). Svyaz' rezul'tatov Yedinogo gosudarstvennogo ekzamena i uspevayemosti v vuze. Voprosy obrazovaniya, (1).
3. Monakhov, V. V. (2011). Analiz rezul'tatov YEGE po matematike i fizike i internet-olimpiady po fizike. Komp'yuternyye instrumenty v obrazovanii, (1).
4. Babenko, A. S., Margolina, N. L., & Matytsina, T. N. (2016). Osobennosti podgotovki ekspertov po proverke zadaniy s razvernutym otvetom yedinogo gosudarstvennogo ekzamena po matematike. Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika. Psikhologiya. Sotsiokinetika, 22(3).

5. Babenko, A. S., Margolina, N. L., & Matytsina, T. N. (2016). Analiz struktury zadaniy yedinogo gosudarstvennogo ekzamena po matematike za 2016 god po Kostromskoy oblasti. Vestnik Kostromskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya: Pedagogika. Psikhologiya. Sotsiokinetika, 22(4).
6. Matsuta, V. V., Bogomaz, S. A., & Sudneva, O. YU. (2014). Rol' intellektual'nykh i lichnostnykh faktorov v dostizhenii vysokoy rezul'tativnosti v YEGE po matematike. Sibirskiy psikhologicheskiy zhurnal, (52).
7. Kisel'nikov, I. V. (2015). Metodicheskiy analiz rezul'tatov Yedinogo gosudarstvennogo ekzamena po matematike profil'nogo urovnya v 2015 godu v Altayskom kraye. Sovremennyye problemy nauki i obrazovaniya, (5), 406-406.
8. SPbGU, O. I. (2011). YEGE i rezul'taty pervogo semestra obucheniya. Matematika v shkole, (5), 28-33.
9. Yashchenko, I. V., Semenov, A. V., & Vysotskiy, I. R. (2015). Metodicheskiye rekomendatsii dlya uchiteley, podgotovlennyye na osnove analiza tipichnykh oshibok uchastnikov YEGE 2015 goda po matematike. M.: FIPI.
10. Pol'din, O. V. (2011). Prognozirovaniye uspevayemosti v vuze po rezul'tatam YEGE. Prikladnaya ekonometrika, (1 (21)).