УДК 37

Формирование умений анализа и синтеза при обучении математике

Шастун Тамара Александровна

Кандидат педагогических наук,
доцент кафедры естественнонаучных дисциплин
и высшей математики,
Московский финансово-промышленный университет «Синергия»,
125190, Российская Федерация, Москва, Ленинградский просп., 80;
e-mail: shastun-ta@yandex.ru

Аннотация

В статье анализируются подходы к формированию умений синтеза при обучении математике как одному из механизмов образовательного процесса. Показано, что учебная и воспитательная функции преподавателя состоят в том, чтобы отличить, дифференцировать студентов по умственным, мыслительным и другим психологическим способностям и дать им возможность учиться. Показано, что практико-ориентированные задания позволяют создать положительную мотивацию студентов для освоения умений анализа и синтеза, сформировать более устойчивое умение, вооружить пониманием общей структуры и приемами анализа и синтеза. В дальнейшем это позволит уменьшить время решения заданий и улучшить качество обучения. Стоит отметить, что умения, которые мы формируем решением данных заданий, будут обладать свойством переноса на задания более широкого класса.

Для цитирования в научных исследованиях

Шастун Т.А. Формирование умений анализа и синтеза при обучении математике // Педагогический журнал. 2017. Т. 7. № 5А. С. 182-189.

Ключевые слова

Формирование умений, психологические особенности обучающихся, учебная функция педагога, воспитательная функция педагога, обучение математике.

Введение

Формирование мышления в развитии интеллектуальных способностей обучающихся – одна из принципиальных целей всякого образования.

Все мыслительные операции, такие как анализ, синтез, сравнение, обобщение, абстракция, конкретизация, возникли как практические операции и лишь со временем стали операциями мышления, методами научного познания.

Каждый акт мышления зависит от стиля умственной деятельности обучающегося и от уровня доступности для него предложенной задачи. Именно поэтому один и тот же пример разные студенты решают по-разному, а некоторые вовсе не справляются с ним.

Таким образом, учебная и воспитательная функции преподавателя состоят в том, чтобы отличить, дифференцировать студентов по умственным, мыслительным и другим психологическим способностям и дать им возможность (а точнее, помочь им или заставить, если необходимо) учиться, придерживаясь одного из принципов обучения «…от легкого к трудному, от простого к сложному, от известного к неизвестному» (Я.А. Коменский).

В психолого-педагогической и методической литературе (Д.Н. Богоявленский, Н.А. Менчинская, П.Я. Гальперин, В.А. Гусев, Е.Н. Кабанова-Меллер, Ю.М. Колягин, В.Г. Болтянский и др.) мыслительные операции называются приемами мыслительной деятельности. Отметим некоторые методические особенности формирования этих приемов при выполнении учебных заданий по математике.

Особенности формирования умений анализа и синтеза при обучении математике

При отработке операций по формированию умений анализа и синтеза преподаватель, составляя учебные задания, должен предусмотреть так называемый ведущий вопрос при анализе (что надо знать, чтобы ответить на поставленный вопрос?) и при синтезе (что мы можем узнать по данным условиям?). Выделение таких вопросов (в явной или неявной форме) помогает обучаемым, особенно на первом этапе, овладеть нелегким искусством анализа и синтеза. Приведем примеры в подтверждение сказанного, призванные продемонстрировать использование ведущих вопросов.

Пример 1. На полке стояло 12 книг, три из которых по математике. Какова вероятность, что наудачу извлеченная книга окажется по математике?

Студент должен поставить и ответить последовательно на следующие вопросы:

- Какие элементы представлены в задаче?
- Какие исходы возможны?
- Какое событие нас интересует? Какой исход назовем благоприятствующим этому событию?

В приведенном примере, чтобы ответить на последний вопрос, нужно предварительно знать ответы на все предыдущие вопросы.

Пример 2. Определить координаты центра тяжести материальной пластины D с заданной поверхностной плотностью ρ (x,y).

Анализ задачи позволяет расчленить поставленную задачу на следующие подзадачи:

- Представить пластину D аналитической системой неравенств или совокупностью систем.
- Вычислить массу пластины, используя двойной интеграл.
- Вычислить статические моменты пластины при помощи двойных интегралов.

- И, наконец, использовать формулы для определения координат центра тяжести.

Пример 3. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, где $a \in R$ и удовлетворяет условию $|a|<1$.

Решение. Заметим, что если a = 0, то очевидно, что $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$. Пусть теперь $0<|a|<1$. Представим $\frac{1}{|a|^n}$ в виде $\frac{1}{|a|^n} = \left(1+\frac{1}{|a|}-1\right)^n$ и воспользуемся неравенством Бернулли $\frac{1}{|a|^n} = \left(1+\frac{1}{|a|}-1\right)^n \geq 1+n\cdot\left(\frac{1}{|a|}-1\right) = 1+\frac{n(1-|a|)}{|a|} > \frac{n(1-|a|)}{|a|}$. Отсюда $|a|^n < \frac{|a|}{n(1-|a|)}, \forall n \in N$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное, но фиксированное число. Рассмотрим неравенство $|a|^n < \frac{|a|}{n(1-|a|)} < \varepsilon$ и из $\frac{|a|}{n(1-|a|)} < \varepsilon$ имеем $n > \frac{|a|}{\varepsilon(1-|a|)}$. Полагая $n(\varepsilon) = \left[\frac{|a|}{\varepsilon(1-|a|)}\right]$, будем иметь $|a|^n < \varepsilon \forall n \in N$. Итак, для $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > n(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|a|^n < \varepsilon$, а это означает по определению, что $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Данное задание направлено на отработку определения предела последовательности и является иллюстрацией решения примеров исходя только лишь из определения предела последовательности. В частности, проверяется, удовлетворяет или нет число 0 определению предела последовательности. Тем самым мы указываем метод решения группы задач, направленных на необходимость подтверждения или опровержения того, что данное число является пределом.

А теперь расширяем границы нашего задания. Возникает вопрос: чему будет равен предел последовательности $\lim_{n\to\infty} a^n$, если $|a|>1$? Анализируя теоретические и практические сведения, полученные ранее, можно выдвинуть предположение о том, что данный предел равен бесконечности. Итак, выдвигаем гипотезу, оформленную в виде примера.

Пример 4. Пусть $|a|>1$, $a \in R$. Доказать, что $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$.

Докажем это. Воспользуемся для $|a|^n$ неравенством Бернулли: $|a|^n = (1+(|a|-1))^n > 1+n(|a|-1) > n(|a|-1) > M$, где M – произвольное положительное число. Получили, что $|a|^n > M$ для $\forall n > \frac{M}{|a|-1}$. Откуда следует, что при всех $n > \left[\frac{M}{|a|-1}\right] = n(M)$ имеем $|a|^n > M$. Значит по определению $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$ при $|a|>1$.

Необходимо подчеркнуть, что общего метода вычисления предела последовательности нет. Обычно придерживаются двух направлений: по определению проверкой предполагаемого числа и используя методы в частных случаях. Вычисление пределов по первому направлению обычно у студентов вызывает затруднения. Поэтому на них стоит заострить внимание, и на вышеописанных примерах, и следующих далее как раз отрабатывается метод вычисления предела последовательности по определению проверкой предполагаемого числа.

При этом, решая примеры 3 и 4, у студента формируются, кроме обучающих умений (умение вычислять предел последовательности), умения анализа, выдвижения предположений, идей.

В ходе проведения занятия по теме «Вычисление пределов последовательностей, связанных с неравенствами» были сформулированы и реализованы основные цели (обучающие, развивающие, проектные, воспитательные). А перед студентами поставлена учебная задача, которая заключается в усвоении темы «Предел последовательности», способствующей формированию умения анализа, а также обобщению, выдвижению идей, гипотез, реализации свои предположений, формулированию выводов.

Такие задания позволяют создать положительную мотивацию студентов для освоения умений анализа и синтеза, сформировать более устойчивое умение, вооружить пониманием общей структуры и приемами анализа и синтеза. В дальнейшем это позволит уменьшить время решения заданий и улучшить качество обучения. Умения, которые мы формируем решением данных заданий, будут обладать свойством переноса на задания более широкого класса.

На начальном этапе обучения важно не перегружать студентов излишним теоретизированием и не снизить их мотивацию, предлагая решать сложные задания.

Приведем пример занятия «одного примера», на котором использовалось задание, направленное на формирование умения анализа. Результатом выполнения подобных заданий является повышение эффективности формирования умений анализа.

Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$, где $a \in R$ и удовлетворяет условию $|a|<1$.

Решение. Заметим, что если а = 0, то очевидно, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$. Пусть теперь $0<|a|<1$. Представим $\frac{1}{|a|^n}$ в виде $\frac{1}{|a|^n} = \left(1+\frac{1}{|a|}-1\right)^n$ и воспользуемся неравенством Бернулли $\frac{1}{|a|^n} = \left(1+\frac{1}{|a|}-1\right)^n \geq 1+n\cdot\left(\frac{1}{|a|}-1\right) = 1+\frac{n(1-|a|)}{|a|} > \frac{n(1-|a|)}{|a|}$. Отсюда $|a|^n < \frac{|a|}{n(1-|a|)}, \forall n \in N$. Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное, но фиксированное число. Рассмотрим неравенство $|a|^n < \frac{|a|}{n(1-|a|)} < \varepsilon$ и из $\frac{|a|}{n(1-|a|)} < \varepsilon$ имеем $n > \frac{|a|}{\varepsilon(1-|a|)}$. Полагая $n(\varepsilon) = \left[\frac{|a|}{\varepsilon(1-|a|)}\right]$, будем иметь $|a|^n < \varepsilon \forall n \in N$. Итак, для $\forall \varepsilon > 0 \exists n(\varepsilon)$ такой, что $\forall n > n(\varepsilon)$, выполняется неравенство $|a|^n < \varepsilon$, а это означает по определению, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0$.

Данное задание направлено на отработку определения предела последовательности и является иллюстрацией решения примеров исходя только лишь из определения предела последовательности. В частности, проверяется, удовлетворяет или нет число 0 определению предела последовательности. Тем самым мы указываем метод решения группы задач, направленных на необходимость подтверждения или опровержения того, что данное число является пределом.

А теперь расширяем границы нашего задания. Возникает вопрос: чему будет равен предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty} a^n$, если $|a|>1$? Анализируя теоретические и практические сведения, полученные ранее, можно выдвинуть предположение, что данный предел равен бесконечности. Итак, выдвигаем гипотезу, оформленную в виде примера.

Пусть $|a|>1$, $a \in R$. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$.

Докажем это. Воспользуемся для $|a|^n$ неравенством Бернулли: $|a|^n = (1+(|a|-1))^n > 1+n(|a|-1) > n(|a|-1) > M$, где M – произвольное положительное число. Получили, что $|a|^n > M$ для $\forall n > \frac{M}{|a|-1}$. Откуда следует, что при всех $n > \left[\frac{M}{|a|-1}\right] = n(M)$ имеем $|a|^n > M$. Значит по определению $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = \infty$ при $|a|>1$.

Необходимо подчеркнуть, что общего метода вычисления предела последовательности нет. Обычно придерживаются двух направлений: по определению проверкой предполагаемого числа и используя методы в частных случаях. Вычисление пределов по первому направлению обычно у студентов вызывает затруднения. Поэтому на них стоит заострить внимание, и на вышеописанных примерах, и следующих далее как раз отрабатывается метод вычисления предела последовательности по определению проверкой предполагаемого числа.

Таким образом, анализ позволил получить совокупность из четырех задач. В данном случае анализ выступает как дидактический, методический и технологический прием решения задачи.

Рассмотрим несколько задач, предусматривающих синтетическую деятельность студентов.

1. Составить линейную систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными с частным решением (2; -1; 3; -2). Является ли построенная система уравнений однозначно разрешимой?

2. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(1; 2; 3) параллельно вектору (3; -4; 5). Построить эту прямую.

Таким образом, поиск решения задачи при синтезе направляется вопросом: зная то-то и то-то, что можно найти, что можно сконструировать, имея те или иные элементарные «строительные блоки»?

Сущность аналитического метода рассуждений о том или ином объекте состоит в том, что исходным пунктом для мыслительной деятельности является сам этот объект, представление о котором путем логически обоснованных шагов сводится к более элементарным объектам с уже известными нам свойствами.

Сущность синтетического метода состоит в том, чтобы сначала рассматривать более простые объекты с известными свойствами, из которых можно было бы путем логически обоснованных шагов сконструировать более сложное устройство с новыми, непредусмотренными заранее свойствами.

Чем большим количеством информации владеет человек, тем быстрее и качественнее происходит синтез, а значит, быстрее и эффективнее учение, обучение, образование.

Анализ и синтез всегда протекают в единстве. Анализируется то, что включает в себя целое, общее. Синтез тоже предполагает анализ. Чтобы соединить элементы в целое, их надо получить в результате анализа.

В качестве примера, где применяются приемы «анализ через синтез» и «синтез через анализ», можно рассмотреть задачу на тему «Построение графиков». Для построения графика произвольной функции студент должен ответить на следующие вопросы:

- какова область определения функции?
- какова область изменения функции?
- каковы интервалы знакопостоянства и где график пересекает оси координат?
- каковы интервалы монотонности?
- есть ли экстремумы и чему равны экстремальные значения?
- какова форма кривой (выпуклость, вогнутость)?

- имеет ли функция асимптоты (вертикальные, наклонные)?

Отвечая на частные вопросы, студент отвечает на главный вопрос: как выглядит график заданной функции? Анализ здесь заключается в соблюдении схемы исследования, а синтез – в ответе на частные вопросы. Сам график – результат синтеза.

Для реализации рассмотренных теоретических положений и их закрепления преподаватель предлагает студентам выполнить практические задания.

Пример 1. Пусть дана функция $y = f(x) = x^2 + x - \frac{3}{4}$.

1. а) определить область дифференцируемости функции;

б) указать точки кривой $y = f(x)$, в которой существует невертикальная касательная.

2. Найти уравнения касательной к данной кривой:

а) в произвольной точке x0;

в) в точке x0 = 1.

3. В каких точках кривой $y = f(x)$ касательная к ней:

а) параллельна оси Ox;

в) параллельна биссектрисе первого координатного угла.

4. Найти угол между заданной кривой и $y = f_1(x) = -x^2 + 2x - \frac{7}{4}$ в точке их пересечения.

Пример 2.

1. Привести примеры функций, для которых в точке x0 = 6 предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ (1) равен бесконечности, при этом предел:

а) не является бесконечностью определенного знака;

б) является бесконечностью положительного знака;

в) является бесконечностью отрицательного знака.

2. Какая из приведенных функций дифференцируема в точке x0 = 6; имеет производную в расширенном смысле?

3. К графику какой функции в точке M0(x0,f(x0)) существует касательная? Написать уравнения этих касательных.

4. Указать схематически изображение графиков функций в окрестности точки x0 = 6.

Решение данного задания позволяет сформировать умения анализа и синтеза. Студенты генерируют идеи, мысли, переносят изученную информацию на решение этого задания. Создается много возможностей для творческого полета мысли, самостоятельного конструирования, создания модели будущей функции.

Заключение

Закреплением и показателем усвоения выступают нестандартные задачи, которые требуют специального творческого решения. Ему предшествует длительная, кропотливая, сознательная учебная работа. Как утверждал А.Н. Колмогоров, математическое творчество основано на интуитивном, а не на формализованном мышлении. И именно при решении этих задач развиваются и закрепляются творческое начало, воображение и математическое мышление.

Возможность такой работы имеется не только у преподавателей естественно-математических курсов, но и у преподавателей других дисциплин, нужно только желание работать в этом направлении. Мы, в частности, продолжаем работу по освоению методов научного познания при изучении математических дисциплин. В течение первых занятий необходимо дать схемы рассуждений и следить строго за ходом мыслей студентов. При известной настойчивости преподавателя суждения студентов станут более аккуратными, обстоятельными, убедительными. Кроме того, обучаемые начинают рациональнее готовиться к лабораторным, семинарским и практическим занятиям, умеют быстро найти необходимую информацию, так как правильный стиль работы дисциплинирует.

Библиография

1. Аминова З.А., Рахимов А.А. Методика использования занимательных заданий в процессе обучения математике в 5 классе // Вестник ЧГПУ. 2012. № 7. С. 11-20.
2. Гришаева А.Г. Методические аспекты применения приемов устного счета на уроках математики в 5-6-х классах // Концепт. 2013. № 8 (24). С. 66-70.
3. Далингер В.А. Организация учебно-исследовательской деятельности учащихся в процессе обучения математике // Ученые записки ЗабГУ. Серия: Физика, математика, техника, технология. 2010. № 2. С. 24-28.
4. Дударева Н.В., Унегова Т.А. Методические аспекты использования метода «Case study» при обучении математике в средней школе // Педагогическое образование в России. 2014. № 8. С. 242-246.
5. Лученкова Е.Б., Носков М.В., Шершнева В.А. Смешанное обучение математике: практика опередила теорию // Вестник КГПУ им. В.П. Астафьева. 2015. № 1 (31). С. 54-59.
6. Лялькина Л.Т., Щербакова О.Ю. Использование тестов при современном обучении математике // Интеграция образования. 2001. № 4-2. С. 13-16.
7. Малахова Е.И. Методика формирования основных приемов мышления в процессе обучения математике // Известия ПГУ им. В.Г. Белинского. 2011. № 26. С. 474-480.
8. Садовников Н.В. Предмет теории и методики обучения математике как научной области // Известия ПГУ им. В.Г. Белинского. 2012. № 28. С. 1012-1019.
9. Шастун Т.А. Комплекс заданий по формированию проектных умений у студентов вузов социального профиля // Известия РГПУ им. А.И. Герцена. 2009. № 91. С. 222-227.
10. Шастун Т.А. Парадигма системной трансформации российской высшей школы // Крымский научный вестник. 2016. № 1. С. 186-195.

The development of the skills of analysis and synthesis in the teaching of mathematics

Tamara A. Shastun
PhD in Pedagogy,
Associate Professor at the Department of natural sciences and higher mathematics,
Moscow University for Industry and Finance "Synergy",
125190, 80 Leningradsky av., Moscow, Russian Federation;
e-mail: shastun-ta@yandex.ru

Abstract

The article aims to analyse approaches to developing the skills of synthesis in the teaching of mathematics as one of the mechanisms of the educational process. It demonstrates that the educational functions of a teacher consist in distinguishing, differentiating students with due regard to their mental, cognitive and other psychological abilities and giving them the opportunity to learn. The author of the article points out that practically oriented tasks allow teachers to create a positive

motivational climate for students to develop the skills of analysis and synthesis, to acquire a more sustainable ability, to gain the understanding of the general structure and techniques of analysis and synthesis. In the future, this will help to reduce the time spent on solving tasks and improve the quality of education. It should be noted that the skills that we are trying to develop through these tasks, will be useful when students have to solve other tasks. Close attention should be paid to unusual tasks that require special creative solutions. It is preceded by long, laborious, conscious educational work. Mathematical creativity is believed to be based on intuitive, not formalised thinking. When trying to solve these tasks, students are developing creativity, imagination and mathematical thinking.

For citation

Shastun T.A. (2017) Formirovanie umenii analiza i sinteza pri obuchenii matematike [The development of the skills of analysis and synthesis in the teaching of mathematics]. *Pedagogicheskii zhurnal* [Pedagogical Journal], 7 (5A), pp. 182-189.

Keywords

Development of skills, psychological characteristics of students, educational function of a teacher, pedagogical function of a teacher, teaching mathematics.

References

1. Aminova Z.A., Rakhimov A.A. (2012) Metodika ispol'zovaniya zanimatel'nykh zadanii v protsesse obucheniya matematike v 5 klasse [Techniques for using interesting tasks in the teaching mathematics in the 5th grade]. *Vestnik ChGPU* [Bulletin of Chelyabinsk State Pedagogical University], 7, pp. 11-20.
2. Dalinger V.A. (2010) Organizatsiya uchebno-issledovatel'skoi deyatel'nosti uchashchikhsya v protsesse obucheniya matematike [The organisation of academic and research activities of students in the process of teaching mathematics]. *Uchenye zapiski ZabGU. Seriya: Fizika, matematika, tekhnika, tekhnologiya* [Proceedings of the Transbaikal State University. Series: Physics, mathematics, engineering, technology], 2, pp. 24-28.
3. Dudareva N.V., Unegova T.A. (2014) Metodicheskie aspekty ispol'zovaniya metoda "Case study" pri obuchenii matematike v srednei shkole [Methodical aspects of the case study method in teaching mathematics in a secondary school]. *Pedagogicheskoe obrazovanie v Rossii* [Pedagogical education in Russia], 8, pp. 242-246.
4. Grishaeva A.G. (2013) Metodicheskie aspekty primeneniya priemov ustnogo scheta na urokakh matematiki v 5-6-kh klassakh [Methodological aspects of the use of techniques of oral accounts in teaching mathematics in the 5-6th grades]. *Kontsept* [Concept], 8 (24), pp. 66-70.
5. Luchenkova E.B., Noskov M.V., Shershneva V.A. (2015) Smeshannoe obuchenie matematike: praktika operedila teoriyu [Blended learning of mathematics: practice outstripped theory]. *Vestnik KGPU im. V.P. Astaf'eva* [Buletin of Krasnoyarsk State Pedagogical University], 1 (31), pp. 54-59.
6. Lyal'kina L.T., Shcherbakova O.Yu. (2001) Ispol'zovanie testov pri sovremennom obuchenii matematike [The use of tests in the modern teaching of mathematics]. *Integratsiya obrazovaniya* [Integration of education], 4-2, pp. 13-16.
7. Malakhova E.I. (2011) Metodika formirovaniya osnovnykh priemov myshleniya v protsesse obucheniya matematike [The method used for forming the basic techniques of thinking in the process of teaching mathematics]. *Izvestiya PGU im. V.G. Belinskogo* [Bulletin of Penza State University], 26, pp. 474-480.
8. Sadovnikov N.V. (2012) Predmet teorii i metodiki obucheniya matematike kak nauchnoi oblasti [The subject of the theory and methods of teaching mathematics as an academic field]. *Izvestiya PGU im. V.G. Belinskogo* [Bulletin of Penza State University], 28, pp. 1012-1019.
9. Shastun T.A. (2009) Kompleks zadanii po formirovaniyu proektnykh umenii u studentov vuzov sotsial'nogo profilya [The complex of tasks for the development of design skills in the students of social higher education institutions]. *Izvestiya RGPU im. A.I. Gertsena* [Herzen University journal of humanities and sciences], 91, pp. 222-227.
10. Shastun T.A. (2016) Paradigma sistemnoi transformatsii rossiiskoi vysshei shkoly [The paradigm of the systemic transformation of Russian higher school]. *Krymskii nauchnyi vestnik* [Crimean scientific bulletin], 1, pp. 186-195.