

УДК 338.2**Изменение национального дохода в зависимости от времени
в модели осциллятора с внешней нелинейной инвестицией****Геворкян Эдуард Аршавирович**

Доктор физико-математических наук, профессор, академик РАЕ,
профессор кафедры математических и естественно-научных дисциплин,
Московский университет им. С.Ю. Витте,
115432, Российская Федерация, Москва, 2-й Кожуховский пр-д, 12/1;
e-mail: gevor_mesi@mail.ru

Аннотация

В статье исследуется зависимость национального дохода от времени ($Y(t)$) в модели осциллятора. Считается, что в правой части обыкновенного неоднородного линейного дифференциального уравнения осциллятора стоит нелинейная функция инвестиций в зависимости от времени (модель Н. Калдора). Приведенный график этой функции показывает ее возрастающий характер с наличием точки перегиба (вокруг этой точки разные направления выпуклости графика). При решении дифференциального уравнения берется три члена разложения нелинейной правой части по формуле Тейлора вокруг точки перегиба $M(3/4; 4/9)$. Решение дифференциального уравнения находится в случае отсутствия транзакционных издержек (нет затухания). При нахождении общего решения дифференциального уравнения использованы методы Эйлера и Лагранжа, а также начальные условия Коши. Графическое представление $Y(t)$ получено на основании общего решения дифференциального уравнения. Из графиков следует колебательно-возрастающий характер $Y(t)$.

Для цитирования в научных исследованиях

Геворкян Э.А. Изменение национального дохода в зависимости от времени в модели осциллятора с внешней нелинейной инвестицией // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2024. Том 14. № 7А. С. 15-21.

Ключевые слова

Осциллятор, обыкновенное дифференциальное уравнение, национальный доход, инвестиции, методы Эйлера и Лагранжа, модель Н. Калдора.

Введение

Научные работы по эконофизике начали появляться в научной литературе начиная с середины 1990-ых годов. В этих работах при исследовании экономических процессов ученые начали использовать математические модели, которые разработаны для проведения научных исследований физических явлений. В работе [Хавинсон, 2015] автор описывает основные идеи и результаты эконофизики. В частности, указано важность применения математических нелинейных динамических моделей при исследовании динамики экономических и социальных систем. Показано, что прогнозы экономических кризисов можно выявить с помощью математических методов квантовой и статистической физики. Определения основных физических величин в экономике и методологические основы физической экономики даны в работе [Давыдянец, 2016]. Работы [Лебедев, 2016] и [Романовский, 2019] посвящены обсуждению использования естественнонаучных методов решения многих экономических и социальных задач. В частности, в работе [Романовский, 2019] авторами изложены стохастические и динамические модели математической экономики. Автор книги [Кузнецов, 2016] обращает внимание на связи между долгосрочными экономическими прогнозами и тенденциями прогресса теоретической физики. Также автором затронут вопрос о некоторых общих понятиях в экономической науке и в квантовой физике. О соответствии закона спроса и предложения в экономике с законом сохранения материи и энергии в физике говорят авторы работы [Мудрик, 2017]. В работе [Мантенья, 2021] авторы показывают возможность применения методов статистической физики при исследовании финансовых систем. Автором работы [Иванская, 2015] предлагается при исследовании экономических явлений не исходить из циклической экономической модели, а рассматривать изменение состояния экономической системы в физической модели гармонического осциллятора, который может создать гармонические колебания. Это объясняется тем, что равновесие экономической системы нужно рассматривать не в неподвижном, а в динамическом состоянии. Работы [Геворкян, 2023] и [Геворкян, 2022] были посвящены исследованию национального дохода $Y(t)$ в модели гармонического осциллятора как при линейной, так и при нелинейной зависимости инвестиций от времени. В настоящей работе решается аналогичная задача, когда инвестиции зависят от времени согласно модели Н. Калдора [Agarwal, 2024].

Метод решения поставленной задачи и полученные результаты

Предположим, что $Y(t)$ удовлетворяет уравнению

$$Y''(t) + \omega_0^2 \cdot Y(t) = I(t), \quad (1)$$

где $I(t) = (2t + 1)^2 / (t + 3)^2$ определяет внешние инвестиции, а экономический смысл остальных членов и параметра ω_0^2 определен в работе.

Отметим, что исследование функции $I(t) = (2t + 1)^2 / (t + 3)^2$ с помощью дифференциального исчисления приводит к следующему: $I(t)|_{t=0} = 1/9$, $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 4$ (прямая $I(t) = 4$ является горизонтальной асимптотой для $I(t)$), точка с координатами $(3/4; 4/9)$ является точкой перегиба для $I(t)$ (рис. 1).

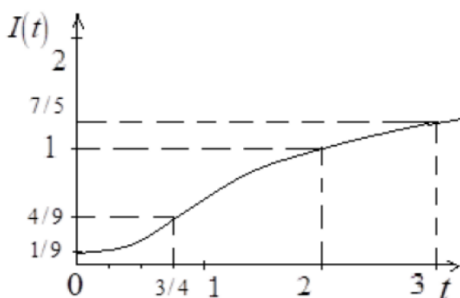


Рисунок 1 - График функции $I(t) = (2t + 1)^2 / (t + 3)^2$ ($0 \leq t < \infty$).

Для нахождения общего решения уравнения (1) будем пользоваться методами Эйлера и Лагранжа. Решая уравнение

$$Y''(t) + \omega_0^2 \cdot Y(t) = 0 \quad (2)$$

методом Эйлера, получим

$$Y_{o.o.}(t) = c_1 \cdot \cos \omega_0 t + c_2 \cdot \sin \omega_0 t. \quad (3)$$

где $c_1 = \text{const}$, $c_2 = \text{const}$.

Если теперь частное решение (1) ($Y_{ч.н.}(t)$) искать в виде

$$Y_{ч.н.}(t) = c_1(t) \cdot \cos \omega_0 t + c_2(t) \cdot \sin \omega_0 t. \quad (4)$$

и далее пользоваться методом Лагранжа, то для определения $c_1(t)$ и $c_2(t)$ получим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} c_1'(t) \cdot \cos \omega_0 t + c_2'(t) \cdot \sin \omega_0 t = 0, \\ -c_1'(t) \cdot \omega_0 \cdot \sin \omega_0 t + c_2'(t) \cdot \omega_0 \cdot \cos \omega_0 t = \frac{(2t+1)^2}{(t+3)^2}. \end{cases} \quad (5)$$

Решение системы (5) выражается формулами

$$c_1'(t) = -\frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{(2t+1)^2}{(t+3)^2} \cdot \sin \omega_0 t, \quad (6)$$

$$c_2'(t) = \frac{1}{\omega_0} \cdot \frac{(2t+1)^2}{(t+3)^2} \cdot \cos \omega_0 t. \quad (7)$$

Отметим, что интересной областью по времени в поставленной задаче является область вокруг точки перегиба функции $I(t)$ (рис. 1). Разложение $I(t)$ по степеням $t - 3/4$ по формуле Тейлора имеет вид

$$I(t) = I\left(\frac{3}{4}\right) + \frac{I'(t)}{1!} \Big|_{t=\frac{3}{4}} \cdot \left(t - \frac{3}{4}\right) + \frac{I''(t)}{2!} \Big|_{t=\frac{3}{4}} \cdot \left(t - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{I'''(t)}{3!} \Big|_{t=\frac{3}{4}} \cdot \left(t - \frac{3}{4}\right)^3 + \dots \quad (8)$$

Если теперь ограничиться тремя членами разложения (8), то получим

$$I(t) = \frac{(2t+1)^2}{(t+3)^2} \simeq 0,1 \cdot t^2 + 0,4 \cdot t. \quad (9)$$

Тогда дифференциальные уравнения (1), (6) и (7) примут вид

$$Y''(t) + \omega_0^2 \cdot Y(t) = 0,1 \cdot t^2 + 0,4 \cdot t, \quad (10)$$

$$dc_1(t) = -\frac{1}{\omega_0} \cdot (0,1 \cdot t^2 + 0,4 \cdot t) \cdot \sin \omega_0 t dt, \quad (11)$$

$$dc_2(t) = \frac{1}{\omega_0} \cdot (0,1 \cdot t^2 + 0,4 \cdot t) \cdot \cos \omega_0 t dt. \quad (12)$$

Интегрирование уравнений (11) и (12) приводит к следующим выражениям для $c_1(t)$ и $c_2(t)$:

$$c_1(t) = \frac{0,1}{\omega_0^2} \cdot t^2 \cos \omega_0 t - \frac{0,2}{\omega_0^3} \cdot t \cdot \sin \omega_0 t - \frac{0,2}{\omega_0^4} \cdot \cos \omega_0 t + \frac{0,4}{\omega_0^2} \cdot t \cdot \cos \omega_0 t - \frac{0,4}{\omega_0^3} \cdot \sin \omega_0 t, \quad (13)$$

$$c_2(t) = \frac{0,1}{\omega_0^2} \cdot t^2 \cdot \sin \omega_0 t + \frac{0,2}{\omega_0^3} \cdot t \cdot \cos \omega_0 t - \frac{0,2}{\omega_0^4} \cdot \sin \omega_0 t + \frac{0,4}{\omega_0^2} \cdot t \cdot \sin \omega_0 t + \frac{0,4}{\omega_0^3} \cdot \cos \omega_0 t. \quad (14)$$

Теперь учитывая, что $Y_{o.n.}(t) = Y(t) = Y_{o.o.}(t) + Y_{ч.n.}(t)$ и имея ввиду (3), (4), (13), (14), получим

$$Y(t) = c_1 \cdot \cos \omega_0 t + c_2 \cdot \sin \omega_0 t - \frac{0,2}{\omega_0^4} + \frac{0,4}{\omega_0^2} \cdot t + \frac{0,1}{\omega_0^2} \cdot t^2. \quad (15)$$

Коэффициенты c_1 и c_2 в (15) находятся из начальных условий Коши

$$Y(t)|_{t=0} = 0, Y'(t)|_{t=0} = 0$$

и выражаются формулами

$$c_1 = \frac{0,2}{\omega_0^4}, c_2 = -\frac{0,4}{\omega_0^3}. \quad (16)$$

Подстановка (16) в (15) приводит к следующему

$$Y(t) = \frac{0,2}{\omega_0^4} \cdot \cos \omega_0 t - \frac{0,4}{\omega_0^3} \cdot \sin \omega_0 t - \frac{0,2}{\omega_0^4} + \frac{0,4}{\omega_0^2} \cdot t + \frac{0,1}{\omega_0^2} \cdot t^2. \quad (17)$$

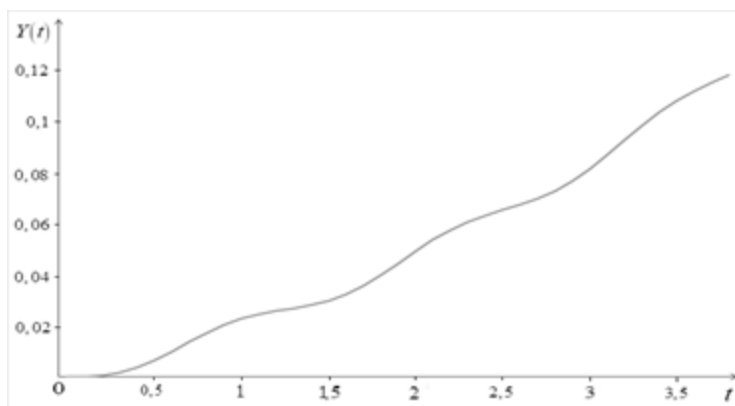


Рисунок 2 - График функции $Y(t)$ (формула (17)), когда $\omega_0 = 5$, $0 \leq t \leq 3,8$.

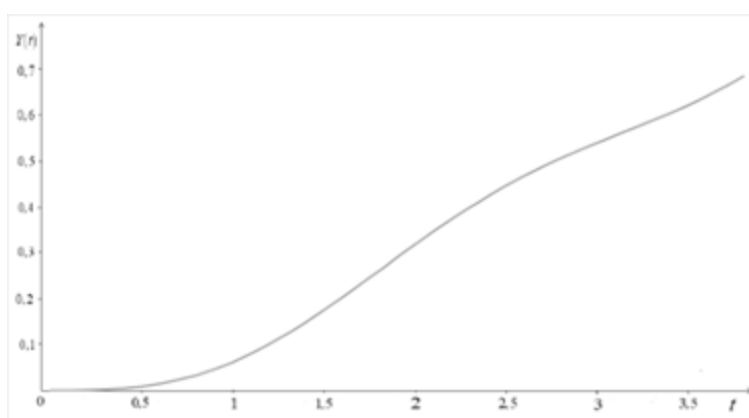


Рисунок 3 - График функции $Y(t)$ (формула (17)), когда $\omega_0 = 2$, $0 \leq t \leq 3,8$.

Следует отметить, что графики на рисунках 1 и 2 показывают поведение национального дохода $Y(t)$ в случае, когда внешние инвестиции рассматриваются в модели Калдора. Эти графики построены на основании решения уравнения осциллятора (см., формулу (17)).

Заключение

В результате решения поставленной задачи получено аналитическое выражение национального дохода $Y(t)$ вокруг точки перегиба функции внешних инвестиций с точностью до членов порядка t^2 включительно. Полученная формула для $Y(t)$ и графики, построенные по этой формуле для различных значений частоты ω_0 показывают, что $Y(t)$ является возрастающей функцией с периодически-колебательным проявлением. При этом с увеличением частоты ω_0 уменьшается период колебаний.

Библиография

1. Хавинсон М.Ю. Экономическая физика: от анализа финансов до судьбы человечества // Пространственная экономика. 2015. № 1. С. 144 – 166.
2. Давыдянец Д.Е. Физическая экономика: теория, методология, системообразующие начала. Монография. М.: МИРАКЛЬ. 2016. 72 с.
3. Лебедев В.В., Лебедев К.В. О естественнонаучных методах исследования в экономике. // Вестник университета (Государственный университет управления). 2016. № 10. С. 70 – 75.

4. Кузнецов Б.Г. Физика и экономика. У истоков эконофизики. URSS. ЛИБРОКОМ. 2016. 88 с.
5. Мудрик Д.Г., Попов С.Ю., Ястребов Е.В. Экономическая физика: закон спроса и предложения, как результат действия универсального закона сохранения материи и энергии в экономике. Понятие сил в экономике // Проблемы экономики и юридической практики. 2017. № 3. С. 10 – 16.
6. Романовский М.Ю., Романовский Ю.М. Математические начала эконофизики. М.-Ижевск. Институт компьютерных исследований. 2019. 360 с.
7. Мантенья Р.Н., Стенли Г.Ю. Введение в эконофизику: корреляции и сложность в финансах / Перевод с английского. М.: URSS, ЛЕНАНД. 2021. 192 с.
8. Иванская Е.Ю. Теоретические аспекты исследования неравновесных экономических систем на основе модели гармонического осциллятора // Теория и практика общественного развития. 2015. № 21. С. 57 – 59.
9. Геворкян Э.А. Характер изменения национального дохода в модели гармонического осциллятора при линейной зависимости внешних инвестиций от времени // Вестник алтайской академии экономики и права. 2023. № 5. С. 58 – 63.
10. Геворкян Э.А., Сурина Е.Е. Динамика изменения национального дохода в модели гармонического осциллятора с возмущением // Вестник алтайской академии экономики и права. 2022. № 2. С. 28 – 33.
11. Agarwal M. Basic Kaldor's Model (With Diagrams) [Электронный ресурс] www.economicsdiscussion.net (дата обращения 11.08.2024).

Change in national income because of time in the oscillator model with external nonlinear investment

Eduard A. Gevorkyan

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor,
Academician of the Russian Academy of Natural Sciences,
Professor of the Department of Mathematical and Natural Sciences,
Moscow University named after S. Yu. Witte,
115432, 12/1, 2-y Kozhukhovskiy pr-d, Moscow; Russian Federation;
e-mail: gevor_mesi@mail.ru

Abstract

The paper explores the time dependence of national income ($Y(t)$) in the oscillator model. It is believed that in the right part of the ordinary non-homogeneous linear differential equation of the oscillator there is a non-linear investments function depending on time (N. Kaldor's model). The given graph of this function shows its increasing nature with the presence of an inflection point (there are different directions of convexity of the graph around this point). During the solution, three terms of the expansion of the nonlinear right-hand side are taken according to the Taylor formula around the inflection point $M(3/4; 4/9)$. The solution of the differential equation is found in the absence of transaction costs (no attenuation). In finding the general solution of the differential equation, the Euler and Lagrange methods, as well as the Cauchy initial conditions, were used. The graphical representation $Y(t)$ was obtained based on the general solution of the differential equation. The oscillatory-increasing nature of $Y(t)$ follows from the graphs.

For citation

Gevorkyan E.A. (2024) *Izmenenie natsional'nogo dokhoda v zavisimosti ot vremeni v modeli ostsillyatora s vneshnei nelineinoi investitsiei* [Change in national income because of time in the oscillator model with external nonlinear investment]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 14 (7A), pp. 15-21.

Keywords

Oscillator, ordinary differential equation, national income, investment, Euler and Lagrange methods, N. Kaldor model.

References

1. Khavinson M.Yu. Econophysics: from financial analysis to the fate of mankind // *Spatial economy*. 2015. No. 1. Pp. 144 – 166.
2. Davydyants D.E. *Physical economy: theory, methodology, system-forming principles*. Monograph. Moscow: MIRACLE. 2016. 72 p.
3. Lebedev V.V., Lebedev K.V. On natural science research methods in economics // *Bulletin of the University (State University of Management)*. 2016. No. 10. Pp. 70 – 75.
4. Kuznetsov B.G. *Physics and economics. At the origins of econophysics*. URSS. LIBROCOM. 2016. 88 p.
5. Mudrik D.G., Popov S.Yu., Yastrebov E.V. *Economic Physics: The Law of Supply and Demand as a Result of the Universal Law of Conservation of Matter and Energy in the Economy. The Concept of Forces in the Economy* // *Problems of Economics and Legal Practice*. 2017. No. 3. Pp. 10 - 16.
6. Romanovsky M.Yu, Romanovsky Yu.M. *Mathematical Principles of Econophysics*. M.-Izhevsk. Institute of Computer Research. 2019. 360 p.
7. Mantegna R.N., Stanley G.Yu. *Introduction to Econophysics: Correlations and Complexity in Finance* / Translation from English. Moscow: URSS, LENAND. 2021. 192 p.
8. Ivanskaya E.Yu. Theoretical Aspects of the Study of Nonequilibrium Economic Systems Based on the Harmonic Oscillator Model // *Theory and Practice of Social Development*. 2015. No. 21. Pp. 57 – 59.
9. Gevorkyan E.A. The nature of changes in national income in the harmonic oscillator model with a linear dependence of foreign investment on time // *Bulletin of the Altai Academy of Economics and Law*. 2023. No. 5. Pp. 58 – 63.
10. Gevorkyan E.A., Surina E.E. Dynamics of changes in national income in the harmonic oscillator model with disturbance // *Bulletin of the Altai Academy of Economics and Law*. 2022. No. 2. Pp. 28 – 33.
11. Agarwal M. Basic Kaldor's Model (With Diagrams) [Electronic resource] www.economicsdiscussion.net (accessed on 11.08.2024).