УДК 33 **DOI: 10.34670/AR.2022.16.22.001**

Способы решения дифференциальных уравнений: вопросы применения в экономическом моделировании

Кандалова Марина Андреевна

Ассистент,
Институт промышленной инженерии,
информационных технологий и мехатроники,
Московский государственный университет пищевых производств,
125080, Российская Федерация, Москва, Волоколамское ш., 11;
e-mail: renemaas@yandex.ru

Аннотация

Дифференциальные уравнения применяют для описания природных явлений математическим языком. Они широко используются, когда речь идет о решении задач с изменяющимися во времени процессами либо о невозможности установить однозначную связь между значениями, описывающими определенный процесс. Сфера применения дифференциальных уравнений включает экономику, биологию, физику и многие другие области науки. Самая распространенная область, в которой применяются дифференциальные уравнения – математическое описание природных явлений. Также их применяют при решении задач, где невозможно установить прямую связь между некоторыми значениями, описывающими какой-либо процесс. Такие задачи возникают в биологии, физике, экономике. Рассмотрим способы решения дифференциальных уравнений первого порядка, виды уравнений такого рода и примеры их использования на практике. В статье были рассмотрены способы решения дифференциальных уравнений вида: обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными; однородные дифференциальные уравнения первого порядка; линейные дифференциальные уравнения первого порядка; уравнения Бернулли; обыкновенные дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков; дифференциальные уравнения второго порядка, сводящиеся к дифференциальным уравнениям первого порядка; линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами; однородные уравнения; линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Для цитирования в научных исследованиях

Кандалова М.А. Способы решения дифференциальных уравнений: вопросы применения в экономическом моделировании // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2022. Том 12. № 9А. С. 13-19. DOI: 10.34670/AR.2022.16.22.001

Ключевые слова

Малый и средний бизнес, рынок, экономика государства, конкурентоспособность, социально-экономическая стабильность, государственная поддержка, инновация.

Введение

Дифференциальное уравнение – это уравнение, которое связывает значение производной функции с самой функцией, значениями независимой переменной и некоторыми числами (параметрами). Самая распространенная область, в которой применяются дифференциальные уравнения – математическое описание природных явлений. Также их применяют при решении задач, где невозможно установить прямую связь между некоторыми значениями, описывающими какой-либо процесс. Такие задачи возникают в биологии, физике, экономике.

В биологии: первой содержательной математической моделью, описывающей биологические сообщества, была модель Лотки-Вольтерры. Она описывает популяцию, состоящую из двух взаимодействующих видов. Первый из них, именуемый хищниками, при отсутствии второго вымирает по закону $x'=-ax$ $(a>0)$, а второй – жертвы – при отсутствии хищников неограниченно размножается в соответствии с законом Мальтуса. Взаимодействие двух этих видов моделируется так. Жертвы вымирают со скоростью, равной числу встреч хищников и жертв, которое в данной модели предполагается пропорциональным численности обеих популяций, т. е. равной dxy $(d > 0)$. Поэтому $y' = by – dxy$. Хищники же размножаются со скоростью, пропорциональной числу съеденных жертв: $x' = –ax + cxy$ $(c > 0)$.

Система уравнений

$$x' = –ax + cxy, \tag{1}$$

$$y' = by – dxy, \tag{2}$$

описывающая такую популяцию хищник-жертва и называется системой (или моделью) Лотки-Вольтерры.

В физике: второй закон Ньютона можно записать в форме дифференциального уравнения

m((d^2)x)/(dt^2) = F(x,t),

где m — масса тела,

x — его координата,

F(x, t) – сила, действующая на тело с координатой x в момент времени t. Его решением является траектория движения тела под действием указанной силы.

В экономике: модель естественного роста выпуска. Будем полагать, что некоторая продукция продается по фиксированной цене P. Обозначим через $Q(t)$ количество продукции, реализованной на момент времени t; тогда на этот момент времени получен доход, равный $PQ(t)$. Пусть часть указанного дохода расходуется на инвестиции в производство реализуемой продукции, т.е.

$$I(t)=mPQ(t), \tag{3}$$

где m — норма инвестиции — постоянное число, причем 0.

Основная часть

Для решения дифференциального уравнения производную функции следует записать через дифференциалы dy/dx и преобразовать полученное выражение так, чтобы в одной части содержалась только функция переменной x, а в другой - только функция переменной y:

$dy/dx=f(x)*g(y)$.

Для решения уравнения умножим обе части на dx. Тогда $dy=f(x)*g(y)*dx$.

Разделим обе части на g(y). Получим $dy/g(y)=f(x)*dx$.

Теперь можно интегрировать обе части: $\int dy/g(y)=\int f(x)dx+C$. При интегрировании появляется произвольная постоянная С. Но при делении обеих частей уравнения, содержащие неизвестные x и y, могут быть потеряны решения, обращающие эти выражения в ноль.

Однородные дифференциальные уравнения первого порядка имеют вид: $P(x,y)*dx + Q(x,y)*dy=0$, если P(x,y) и Q(x,y) - однородные функции одного измерения. В этом случае уравнение может быть приведено к виду $y'=f(y/x)$, где f(y/x) -однородная функция нулевого измерения.

Решение однородного дифференциального уравнения сводится к приведению к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки: $y=t*x$, $y'=t'x+t$, где t(x) - новая неизвестная функция переменной x.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка имеют вид: $y'+P(x)*y=Q(x)$, где P(x) и Q(x) - непрерывные функции от x или постоянные величины, а неизвестная функция y и ее первая производная y' входят в уравнение в первых степенях.

Линейные уравнения такого вида решаются подстановкой: $y=u*v$, $y'=u'v+v'u$, где u(x), v(x) - неизвестные функции переменной x, подлежащие определению. Вместо одной неизвестной функции y вводятся две новых функции. Имеется одно условие для отыскания двух неизвестных функций u(x) и v(x) - их произведение удовлетворяет исходному дифференциальному уравнению. Чтобы сделать задачу определенной, требуется выдвинуть второе условие. Для этого подставим в дифференциальное уравнение выражения для y и y': $u'v+v'u+P(x)*uv=Q(x)$.

Группируем первый член с третьим и второй с третьим. Например,

$$u'v+u*(v'+P(x)*v)=Q(x). \tag{4}$$

Второе условие зададим так: v(x) должна быть такой, чтобы выражение, стоящее в скобках, равнялось нулю:

$v'+P(x)*v=0$.

Последнее условие - это уравнение с разделяющимися переменными.

Разделяя переменные и интегрируя это уравнение, находим функцию v(x):

$$dv/dx= -P(x)*v,\ dv/v= -P(x)*dx,\ \int dv/v= -\int P(x)*dx,\ \ln|v|=-\int P(x)*dx,\ v=e-\int P(x)*dx. \tag{5}$$

Последнее равенство является общим решением уравнения с разделяющимися переменными, т.к. неявно содержит произвольную постоянную С. Нам достаточно знать любое, отличное от нуля, частное решение уравнения. Поэтому, полагая С=0, получим эту функцию из равенства (5). То есть при решении уравнения произвольную постоянную полагаем равной нулю.

Так как v(x) найдена, то возвращаясь к уравнению (4), имеем: $u'v=Q(x)$.

Подставляя v(x), получаем уравнение с разделяющимися переменными для определения функции u(x). Искомое решение будет иметь вид: $y=uv$.

В общем случае уравнение Бернулли имеет вид: $y'+P(x)*y=Q(x)*y^n$.

При решении уравнений Бернулли применяется та же подстановка, что и при решении линейных дифференциальных уравнений: $y=uv$, $y'=u'v+v'u$, где u(x), v(x) - неизвестные функции переменной x, подлежащие определению.

Рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков.

Общее решение уравнения вида $y^{(n)}=f(x)$ можно найти непосредственным интегрированием. На примере дифференциального уравнения второго порядка имеем: $y''=f(x)$ или $(y')'=f(x)$.

Интегрируя обе части уравнения, получим $y'=\int f(x)dx+c_1$.

Интегрируя повторно, найдем общее решение дифференциального уравнения: $y=\int(\int f(x)dx+c_1)dx+c_2$.

Дифференциальные уравнения второго порядка, сводящиеся к дифференциальным уравнениям первого порядка, не содержащие переменной y: $F(x,y',y'')=0$, можно свести к дифференциальному уравнению первого порядка, если использовать замену переменной: $y'=p(x)$, $y''=p'(x)$.

Тогда исходное уравнению станет уравнением первого порядка: $F(x,p,p')=0$, которое можно пытаться решать рассмотренными ранее способами.

Дифференциальное уравнение второго порядка, не содержащее независимой переменной x: $F(y,y',y'')=0$.

Порядок дифференциального уравнения можно понизить, взяв за новую независимую переменную y, а за неизвестную функцию $y'=p(y)$. В этом случае $y'=p(y)$, $y''=p*dp/dy$.

Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами p и q, в случае если оно однородно, имеет вид: $y''+p*y'+q*y=0$,

т.е. уравнение является линейным, если неизвестная функция и все ее производные входят в это уравнение в первой степени, и уравнение является однородным, если его правая часть равна нулю.

Если искать решение дифференциального уравнения в виде $y=e^{кx}$, то, подставив данную функцию и ее производные в исходное уравнение, будем иметь: $к^2e^{кx}+pкe^{кx}+qe^{kx}=0$ или $k^2+pk+q=0$, так как показательная функция не обращается в ноль.

Уравнение $k^2+pk+q=0$ называется характеристическим уравнением для однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Заметим, что для составления характеристического уравнения достаточно в исходном уравнении y'', y' и y заменить на $к^2$, к и 1 соответственно.

При решении характеристического уравнения возможны три случая.

1. Дискриминант уравнения D>0. Тогда квадратное уравнение имеет два различных действительных корня $к_1 \neq к_2$ и общим решением однородного уравнения будет функция $y_{оо}=c_1e^{к1*x}+c_2e^{к2*x}$, где $к_1$ и $к_2$ - произвольные постоянные.

2. Дискриминант уравнения D=0. Тогда квадратное уравнение имеет два равных действительных корня $к_1=к_2$ и общим решением однородного уравнения будет функция $y_{оо}=e^{к1*x}(c_1+c_2x)$.

3. Дискриминант уравнения D<0. Тогда квадратное уравнение имеет два различных комплексных корня $к_1=\alpha+\beta i$ и $к_2=\alpha-\beta i$ $(\beta\neq0)$ и общим решением однородного уравнения будет функция $y_{оо}=e^{\alpha x}(c_1*\cos\beta x+c_2*\sin\beta x)$.

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида

$y''+py'+qy=f(x)$, $f(x)\neq0$ можно записать в виде суммы $y_{он}=y_{оо}+y_{чн}$,

где $y_{оо}$ - общее решение соответствующего однородного уравнения, а $y_{чн}$ - частное решение данного уравнения.

Частное решение может быть найдено методом неопределенных коэффициентов в следующих случаях:

I. $f(x)=P_n(x)*e^{\alpha x}$ или

II. $f(x)=e^{\alpha x}(P_n(x)*\cos bx+Q_m(x)*\sin bx)$.

Метод неопределенных коэффициентов состоит в следующем: по виду правой части f(x) исходного уравнения записывают ожидаемую форму частного решения с неопределенными коэффициентами, затем подставляют ее в исходное уравнение и из полученного тождества находят значения коэффициентов.

Случай I. Пусть исходное уравнение имеет вид:

$y''+py'+qy=P_n(x)e^{\alpha x}$,

где $P_n(x)$ - многочлен степени n и α - действительное число.

Если α не является корнем характеристического уравнения, т.е. $\alpha\neq к_1$ и $\alpha\neq к_2$, то частное решение ищем в виде: $y_{чн}=Q_n(x)*e^{\alpha x}$,

где $Q_n(x)$ - многочлен степени n с неопределенными коэффициентами.

Если α есть корень характеристического уравнения кратности r (r=1 или r=2), то частное решение ищем в виде: $y_{чн}=x^r *Q_n(x)*e^{\alpha x}$.

Случай II. Пусть исходное уравнение имеет вид:

$y''+py'+qy= e^{\alpha x} *(P_n(x)*\cos bx + Q_m(x)*\sin bx)$,

где $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ - многочлены степени n и m соответственно, а и в - действительные числа. Составим число z=a+bi и сравним его с корнями характеристического уравнения. Если z не является корнем характеристического уравнения, т.е. $z_1\neq k_1$ и $z_2\neq k_2$, то частное решение ищем в виде: $y_{чн}=e^{ax}*(S_N(x)*\cos bx+T_N(x)*\sin bx)$,

где $S_N(x)$ и $T_N(x)$ - многочлены одинаковой степени N=max{m,n}.

Если z есть корень характеристического уравнения, т.е. $z=k_1$ и $z\neq k_2$, то частное решение ищем в виде

$y_{чн}=xe^{\alpha x}(S_N(x)*\cos bx + T_N(x)*\sin bx)$.

Заключение

В статье были рассмотрены способы решения дифференциальных уравнений вида: обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными; однородные дифференциальные уравнения первого порядка; линейные дифференциальные уравнения первого порядка; уравнения Бернулли; обыкновенные дифференциальные уравнения второго и более высоких порядков; дифференциальные уравнения второго порядка, сводящиеся к дифференциальным уравнениям первого порядка; линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами; однородные уравнения; линейные неоднородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами и правой частью специального вида.

Библиография

1. Деловой климат в промышленности в 2020 г. М., 2020. 24 с.
2. Долгова В.Н., Медведева Т.Ю. Теория статистики. М.: Юрайт, 2019. 246 с.
3. Ковалев В.В. (ред.) Статистика с элементами эконометрики. Часть 2. М.: Юрайт, 2019. 348 с.
4. Малых Н.И. Статистика в 2-х томах. Том 2. Социально-экономическая статистика. М.: Юрайт, 2017. 474 с.
5. Муратова Т.В. Дифференциальные уравнения. М.: Юрайт, 2020. 435 с.
6. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисление. М.: Наука, 1985. Т. 2. 560 с.
7. Тимохина А.О., Дорохов В.М. Задачи по дифференциальным уравнениям с решениями и ответами. М., 2010. 44 с.

8. Трофимов А.Г. Математическая статистика. М.: Юрайт, 2019. 260 с.
9. Nguyen H. T. On random sets for inference in statistics and econometrics //International Econometric Conference of Vietnam. – Springer, Cham, 2021. – С. 3-21.
10. Magnus J. R., Neudecker H. Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. – John Wiley & Sons, 2019.

Methods of solving differential equations: questions of application in economic modeling

Marina A. Kandalova

Assistant,
Institute of Industrial Engineering, Information Technology and Mechatronics,
Moscow State University of Food Production,
125080, 11, Volokolamskoe h., Moscow, Russian Federation,
e-mail: renemaas@yandex.ru

Abstract

Differential equations are used to describe natural phenomena in mathematical language. They are widely used when it comes to solving problems with time-varying processes or the impossibility of establishing an unambiguous relationship between values that describe a particular process. The scope of differential equations includes economics, biology, physics and many other areas of science. The most common area in which differential equations are applied is the mathematical description of natural phenomena. They are also used in solving problems where it is impossible to establish a direct relationship between some values that describe a process. Such problems arise in biology, physics, and economics. Consider ways to solve first-order differential equations, types of equations of this kind and examples of their use in practice. The article considered methods for solving differential equations of the form: ordinary differential equations of the first order with separable variables; homogeneous differential equations of the first order; linear differential equations of the first order; Bernoulli equations; ordinary differential equations of the second and higher orders; second order differential equations reducing to first order differential equations; linear differential equations of the second order with constant coefficients; homogeneous equations; linear inhomogeneous differential equations with constant coefficients and a right-hand side of a special form.

For citation

Kandalova M.A. (2022) Sposoby resheniya differentsial'nykh uravnenii: voprosy primenenia v ekonomicheskom modelirovanii [Methods of solving differential equations: questions of application in economic modeling]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 12 (9A), pp. 13-19. DOI: 10.34670/AR.2022.16.22.001

Keywords

Differential equations, process, dynamics, mathematical model, linearity, uniformity.

References

1. (2020) *Delovoi klimat v promyshlennosti v 2020 g.* [Business climate in industry in 2020]. Moscow.
2. Dolgova V.N., Medvedeva T.Yu. (2019) *Teoriya statistiki* [The theory of statistics]. Moscow: Yurait Publ.
3. Kovalev V.V. (ed.) (2019) *Statistika s elementami ekonometriki. Chast' 2* [Statistics with elements of econometrics. Part 2]. Moscow: Yurait Publ.
4. Magnus, J. R., & Neudecker, H. (2019). Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics. John Wiley & Sons.
5. Malykh N.I. (2017) *Statistika v 2-kh tomakh. Tom 2. Sotsial'no-ekonomicheskaya statistika* [Statistics in 2 volumes. Volume 2. Socio-economic statistics]. Moscow: Yurait Publ.
6. Muratova T.V. (2020) *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. Moscow: Yurait Publ.
7. Nguyen, H. T. (2021, January). On random sets for inference in statistics and econometrics. In International Econometric Conference of Vietnam (pp. 3-21). Springer, Cham.
8. Piskunov N.S. (1985) *Differentsial'noe i integral'noe ischislenie* [Differential and integral calculus]. Moscow: Nauka Publ. Vol. 2.
9. Timokhina A.O., Dorokhov V.M. (2010) *Zadachi po differentsial'nym uravneniyam s resheniyami i otvetami* [Problems on differential equations with solutions and answers]. Moscow.
10. Trofimov A.G. (2019) *Matematicheskaya statistika* [Math statistics]. Moscow: Yurait Publ.