**УДК 33** **DOI: 10.34670/AR.2021.66.28.008**



# Смешанная задача для модельного локально-нагруженного уравнения параболического типа в трехслойной среде: экономические аспекты

**Магомаева Мая Алимовна**

Кандидат физико-математических наук, доцент,
Грозненский государственный нефтяной технический
университет им. академика М.Д. Миллионщикова,
364051, Российская Федерация, Грозный, просп. им. Х.А. Исаева, 100;
e-mail: uspeeva@mail.ru

**Гачаев Ахмед Магомедович**

Кандидат физико-математических наук, доцент,
Грозненский государственный нефтяной технический
университет им. академика М.Д. Миллионщикова,
364051, Российская Федерация, Грозный, просп. им. Х.А. Исаева, 100;
завкафедрой высшей и прикладной математики,
Комплексный научно-исследовательский институт
им. Х.И. Ибрагимова Российской академии наук,
366002, Российская Федерация, Грозный, Старопромысловское шоссе, 21-а;
e-mail: uspeeva@mail.ru

**Аннотация**

В данной статье исследуется краевая задача для системы нагруженных дифференциальных уравнений параболического типа, которая описывает движение подземных вод в трехслойном пласте, состоящем из двух слабопроницаемых слоев, соединенных хорошо проницаемым слоем. Найдены условия существования и единственности решения рассматриваемой задачи. Результат может быть использован при решении прикладных задач, например, задач прогноза и регулирования уровня грунтовых вод на мелиорируемой территории. Задачи прогноза и регулирования уровня грунтовых вод, содержания влаги и соли в почве грунтах на мелиорируемой территории, моделирование различных биологических процессов и явлений приводят к классу дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, получившие название нагруженных уравнений.

**Для цитирования в научных исследованиях**

Магомаева М.А., Гачаев А.М. Смешанная задача для модельного локально-нагруженного уравнения параболического типа в трехслойной среде: экономические аспекты // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2021. Том 11. № 5А. С. 54-62. DOI: 10.34670/AR.2021.66.28.008

**Ключевые слова**

Краевая задача, математическая модель, система дифференциальных уравнений, дифференциальные уравнения дробного порядка, производная дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля, дифференциальные уравнения с частными производными, интегро-дифференциальные уравнения, фильтрация грунтовых вод, водоносные горизонты.

## Введение

Нагруженные уравнения возникают в теории обратных задач и математической теории оптимальных процессов. Поэтому исследование краевых задач для уравнений с частными производными, и, в частности, для локально и нелокально нагруженных уравнений второго порядка параболического типа представляют значительный, в том числе экономический интерес. В частности, задачи, связанные с процессом фильтрации подземных вод, относятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений в основном параболического типа. В случае сложного строения водоносной толщи расчетная схема представляется в виде набора слоев, математической моделью которой является система двумерных уравнений, поскольку водоносные горизонты в сложной толще имеют, как правило, не совпадающие друг с другом напоры.

## Основное содержание

Предполагается, что в хорошо проводящих слоях имеет место горизонтальная фильтрация, а вертикальная, обуславливающая переток между пластами, происходит в прослоях.

Рассмотрим движение подземных вод в трехслойном пласте, состоящем из двух слабопроницаемых слоев, соединенных хорошо проницаемым слоем, описываемое системой нагруженных дифференциальных уравнений параболического типа.

**Задача М.** Найти регулярное в области

$$D = \left\{f(x,y,t): 0 < x < x_0, \begin{matrix} 0 < y < y_3, \\ 0 < t < t_0 \end{matrix}\right\} \tag{1}$$

решение $U(x,y,t)$ уравнения

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \begin{cases} U_{yy}, y_2 < y < y_1, \\ U_{xx} + b_1(x,y,t)\lim\limits_{y\downarrow y_2} U_y - b_2(x,y,t)\lim\limits_{y\uparrow y_1} U_y\,, y_1 < y < y_2, \\ U_{yy}, 0 < y < y_1, \end{cases} \tag{2}$$

Предполагается, что заданные функции $b_1(x,y,t), b_2(x,y,t)$ непрерывны в $D^-$, локально непрерывны по Гельдеру по x в интервале $0 < x < x_0$, равномерно относительно $y, t$.

$D_{0t}^{\mu}\varphi(t)$- дробный интеграл порядка $(-\mu)$, при $\mu < 0$ и дробная производная порядка $\mu$, при $0 < \mu < 1$, равный

$$D_{0x}^{\mu}\varphi(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(-\mu)}\int_0^x \frac{\varphi(t)dt}{(x-t)^{1-\mu}}, \mu < 0, \\ \varphi(x), \mu = 0, \\ \frac{d}{dx}D_{0x}^{\mu-1}\varphi(x), \mu \in ]0,1[ \end{cases} \quad (3)$$

Определение. Регулярным решением уравнения (1) в области D назовем функцию $U = U(x,y,t)$ со следующими свойствами

U непрерывна в $D^{+}, D_{-}$ и $D_{+}$;

Функции

$$U^{+}(x,y_1,t) = \lim_{y\downarrow y_1} U(x,y,t), \quad (4)$$

$$U^{+}(x,y_2,t) = \lim_{y\uparrow y_2} U(x,y,t) \quad (5)$$

имеют по переменной t дробную производную порядка ½ с началом в точке $t = 0$;

Функции $U_y(x,y_1,t)$ и $U_y(x,y_2,t)$ непрерывны в $\overline{\Omega}$, локально непрерывны по Гельдеру по x в интервале $0 < x < x_0$ равномерно по t;

Функции U в области $D_{-}$ имеет непрерывные производные $U_t, U_x, U_{xx}$, а в областях $D^{+}$ и $D^{-}$ - непрерывные производные $U_t, U_y, U_{yy}$;

Функция U в области D за исключением плоскостей $y = y_i, i = 1,2$, удовлетворяет уравнению (1).

**Теорема.** Пусть существует регулярное решение задачи M. Тогда, если $\beta(x,t) \neq 0$ и $\beta_1(x,t) \neq 0, \forall(x,t) \in [0,x_0] \times [0,x_0]$, то функции

$$\upsilon_1(x,t) = U_y(x,y_2,t), \upsilon_2(x,t) = U_y(x,y_1,t) \quad (6)$$

являются решениями системы интегральных уравнений типа Вольтерра второго рода.

**Доказательство.** Принимая во внимание свойства функции $G^{+}(x,t;\xi,\eta)$ первой краевой задачи (2),(3) для уравнения

$$U_t = U_{xx}$$

нетрудно видеть, что

$$U^{+}(x,y,t) = U_0^{+}(x,y,t) + A_{\nu_1\nu_2}(x,y,t), \quad (7)$$

Из соотношения (7) при $y \uparrow y_2$ и $y \downarrow y_1$ соответственно имеем

$$U^{+}(x,y_2,t) = \int_0^t d\eta \int_0^{x_0} [b_1(\xi,y_2,\eta)\nu_1(\xi,\eta) - -b_2(\xi,y_2,\eta)\nu_2(\xi,\eta)]G^{+}(x,t;\xi,\eta)d\xi + +f(x,t), \quad (8)$$

$$U^{+}(x,y_1,t)=\int_0^t d\eta\int_0^{x_0}[b_1(\xi,y_1,\eta)\nu_1(\xi,\eta)--b_2(\xi,y_1,\eta)\nu_2(\xi,\eta)]G^{+}(x,t;\xi,\eta)d\xi++f_1(x,t), \quad (9)$$

где $f^{+}(x,t)=U_0^{+}(x,y_2,t), f_1^{+}(x,t)=U_0^{+}(x,y_1,t)$.

На основании свойств функции Грина $G^{-}(y,t;\xi,\eta)$, $G_{-}(y,t;\xi,\eta)$ заключаем, что решение $U^{-}(x,y,t), U_{-}(x,y,t)$ в областях $D^{+}$ и $D_{+}$ представлены соответственно в виде

$$U^{-}(x,y,t)=\int_0^t \nu_1(x,\eta)G(y_2,t;\xi,\eta)d\eta+\int_0^{y_3}\tau(\xi,y)\,G^{-}(y,t;\xi,0)d\xi$$

$$-U_{-}(x,y,t)\int_0^t \Psi_1(x,\eta)G_{\xi-}(y,t;0,\eta)d\eta+\int_0^{y_1}\tau(\xi,y)\times\times G_{-}(y,t;\xi,0)d\xi$$

$$-\int_0^t \nu_2(x,\eta)\,G_{-}(y,t;y_1,\eta)d\eta.$$

Отсюда при $y\uparrow y_2$ и $y\downarrow y_1$ соответственно, находим

$$U^{-}(x,y_2,t)=\int_0^t \nu_1(x,\eta)G^{-}(y_2,t;y_2,\eta)d\eta+F^{-}(x,t), \quad (10)$$

$$U_{-}(x,y_1,t)=\int_0^t \nu_2(x,\eta)G_{-}(y_1,t;y_1,\eta)d\eta+F_{-}(x,t), \quad (11)$$

где

$$F^{-}(x,t)=\int_0^{y_3}\tau(\xi,y_2)G^{-}(y_2,t;\xi,0)d\xi-\int_0^t \Psi(x,\eta)G_{\xi}^{-}(y_2,t;y_3,\eta)d\eta,$$

$$F_{-}(x,t)=\int_0^t \Psi_1(x,\eta)G_{\xi\_}(y_1,t;0,\eta)d\eta-\int_0^y \tau(\xi,y_1)G_1(y_1,t;\xi,0)d\xi.$$

Согласно условиям (5), (6) из соотношений (8), (9), (10), (11), получаем

$$\int_0^t d\eta\int_0^{x_0}[b_1(\xi,y_1,\eta)\nu_1(\xi,\eta)-b_2(\xi,y_1,\eta)\nu_2(\xi,\eta)]G^{+}(x,t;\xi,\eta)d\xi+\int_1^x(x,t)=$$

$$=\alpha(x,t)\left[\int_0^t \nu_2(x,\eta)G_{-}(y_1,t;y_1,\eta)d\eta+F_{-}(x,t)\right]+$$

$$+\beta(x,t)D_{0t}^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^t \nu_2\,(x,\eta)G_-(y_1,t;y_1,\eta)+F_-(x,t)\right]+\gamma(x,t),$$

$$\int_0^t d\eta\int_0^{x_0}[b_1(\xi,y_2,\eta)\nu_1(\xi,\eta)-b_2(\xi,y_2,\eta)\nu_2(\xi,\eta)]G^+(x,t;\xi,\eta)d\xi+\int(x,t)=$$

$$=\alpha_1(x,t)\left[\int_0^t \nu_1(x,\eta)G^-(y_2,t;y_2,\eta)d\eta+F^-(x,t)\right]+$$

$$+\beta_1(x,t)D_{0t}^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^t \nu_1\,(x,\eta)G^-(y_2,t;y_2,\eta)d\eta+F^-(x,t)\right]+\gamma_1(x,t).$$

Исследуем поведение, в смысле гладкости, ядра $K(x,\eta)$ интегрального уравнения (12). Для этого заметим, что подынтегральная функция при $t\to\eta$ обращается в бесконечность порядка ½, а при $t\to 0$ – ограничена.

Из вида функции $G^-(y_0,t;y_0,\eta)$ нетрудно усмотреть, что она непрерывна $[0,y_0]\times[0,t_0]$. В самом деле, первое слагаемое в представлении $G^-(y_0,t;y_0,\eta)$ при $t\to\eta$ обращается в $\infty$ порядка ½ , а второе слагаемое стремится к нулю при $t\to\eta$.

Таким образом, если $\alpha(x,t)$ и $\beta(x,t)$ непрерывные функции, то ядро $K(x,t)$ непрерывно в $[0,x_0]$.

Аналогично исследуется поведение в смысле гладкости правой части интегрального уравнения.

Рассмотрим выражение

$$D_{0t}^{\frac{1}{2}}f(x,t)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{d\eta}{(t-\eta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{\eta}\Psi_0(x,\eta_1)G_{\xi}^-(y_0,\eta;0,\eta_1)d\eta+$$

$$+\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^t\frac{d\eta}{(t-\eta)^{\frac{1}{2}}}\int_0^{y_0}\tau(\xi,y_0)G^-(y_0,\eta;\xi,0)d\xi=Y_2+Y_3,$$

С учетом, что $G^-(y,t;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-\eta)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{(y-\xi)^2}{4(t-\eta)}}+g^-(y,t;\xi,\eta)$, где

$$g^-(y,t;\xi,\eta)=\frac{1}{2\sqrt{\pi}(t-\eta)^{\frac{1}{2}}}\left\{e^{-\frac{(y+\xi-2y_0)^2}{4(t-\eta)}}-e^{-\frac{(y+\xi-2y_0)^2}{4(t-\eta)}}-e^{-\frac{(y+\xi)^2}{4(t-\eta)}}++\sum\nolimits_{n=\infty}^{\infty}{}'\left[e^{-\frac{(y+\xi-4y_0n)^2}{4(t-\eta)}}-\right.\right.$$

$$e^{-\frac{(y+\xi-4y_0n)^2}{4(t-\eta)}} + e^{-\frac{(y+\xi-2y_0-4y_0n)^2}{4(t-\eta)}} - {}_{-}\, e^{-\frac{(y+\xi-2y_0-4y_0n)^2}{4(t-\eta)}}\Bigg]\Bigg\},$$

штрих над знаком суммы означает, что $n \neq 0$, запишем

$$Y_2(x,t) = \frac{y_0}{2\Gamma(1/2)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{d\eta}{(t-\eta)^{1/2}}\int\limits_0^\eta \Psi_0(x,\eta_1)\frac{1}{(\eta,\eta_1)^{3/2}} \times$$

$$\times\, e^{-\frac{y_0^2}{4(\eta-\eta_1)}}d\eta_1 + \frac{1}{2\Gamma(1/2)}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \frac{d\eta}{(t-\eta)^{1/2}}\int\limits_0^\eta \Psi_0(x,\eta_1)g^-(\eta,\eta_1)d\eta_1.$$

При $t \to \eta$ особенность в подынтегральном выражении интегрируемая, а при $\eta \to \eta_1$, функция $\frac{1}{(\eta,\eta_1)^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{y_0^2}{4(\eta-\eta_1)}}$ стремится к нулю. Второе слагаемое ведет себя не хуже, чем первое.

Таким образом

$$I_2(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1/2)}\int\limits_0^t \frac{d\eta}{(t-\eta)^{-\frac{1}{2}}}\int\limits_0^\eta \Psi_0(x,\eta_1)G^-_{\xi\eta}(y_0,\eta;0,\eta_1)d\eta_1,$$

где очевидно, функция $G^-_{\xi\eta}(y_0,\eta;0,\eta_1)$ является непрерывной функцией в $\overline{\Omega}$.

Следовательно, если $\Psi_0(x,t)$- функция непрерывная, то $Y_3(x,t) \in C(\overline{\Omega})$. Нетрудно видеть, что и $Y_3(x,t) \in C(\overline{\Omega})$.

$$+\frac{1}{2\Gamma(1/2)}\int\limits_0^t \frac{d\eta}{(t-\eta)^{\frac{1}{2}}\eta^{\frac{3}{2}}}\int\limits_0^{y_0} \tau(\xi,y_0)\, e^{-\frac{(y_0-\xi)^2}{4\eta}}d\xi.$$

Чтобы оценить первое слагаемое этого равенства, функцию $\omega^-(\xi,\eta) = \frac{(y_0-\xi)^2}{\eta^{\frac{5}{2}}} e^{-\frac{(y_0-\xi)^2}{4\eta}}$ запишем в виде.

$$\omega^-(\xi,\eta) = \eta^{-\mu}(y_0-\xi)^\alpha\left[\frac{(y_0-\xi)^2}{4\eta}\right]^\beta e^{-\frac{(y_0-\xi)^2}{4\eta}},$$

Тогда, если $\tau(\xi, y_0)$ – функция непрерывная по Гёльдеру (с показателем $\beta$) и учитывая (13), получим, что

$$\left|\int_0^{y_0} \omega^-(\xi,\eta)[\tau(\xi,y_0) - \tau(y_0,y_0)]\, d\xi \le \frac{\text{const}}{\eta^\mu}\int_0^y \frac{d\xi}{|y_0-\xi|^{3-2\mu-\beta}} \le \frac{\text{const}}{\eta^\mu},\right.$$

если $1 - \frac{\beta}{2} < \mu < 1$.

Так как $g^-(\xi,\eta)$ – функция гладкая, а $\tau(\xi, y_0)$ – непрерывная функция в $\overline{\Omega}$, то очевидно, что $Y_3(x,t) \in C(\overline{\Omega})$.

Все остальные интегралы в правой части (12) исследуются совершенно аналогично.

Следовательно, $F(x,t) \in C(\overline{\Omega})$.

О ядре $K_1(x,t)$ можно сказать, что оно имеет особенность при $x = \xi$ и $t = \tau$. Однако эта особенность интегрируемая [3].

Из установленных свойств ядер и правой части интегрального уравнения (12) заключаем, что если $\beta(x,t) \neq 0$ и $\beta_1(x,t) \neq 0$, то (12) однозначно разрешимо и его решение $\nu(x,t) \in C(\overline{\Omega})$.

Легко показать из вида (12), что $\nu(x,t) \in H(\overline{\Omega})$, где $H(\overline{\Omega})$ – пространство функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $\beta$.

## Заключение

Следовательно, решение задачи для уравнения в области D однозначно разрешимо, если $\beta(x,t) \neq 0$, $\beta_1(x,t) \neq 0$. Результат может быть использован при решении прикладных задач, например, задач прогноза и регулирования уровня грунтовых вод на мелиорируемой территории. Задачи прогноза и регулирования уровня грунтовых вод, содержания влаги и соли в почве грунтах на мелиорируемой территории, моделирование различных биологических процессов и явлений приводят к классу дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений, получившие название нагруженных уравнений.

## Библиография

1. Бицадзе А. В. Уравнения математической физики. – М.,1982.
2. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа. – М.: МИР, 1968.
3. Ильин А. М., Калашников А.С., Олейник О.А. Линейные уравнения второго порядка параболического типа. – УМН, 1962, вып. 3 (105), Т.12.
4. Нахушев А. М. Нагруженные уравнения. – дифференциальные уравнения,1983, Т. 1, №1, с. 8-94.
5. Магомаева М. А. Об одном нагруженном уравнении параболического типа с разрывными коэффициентами и его приложение к долгосрочному прогнозу уровня грунтовых вод. Сборник тезисов всероссийского съезда экологов. – Грозный, 2017.
6. Самойлюк Р.Н., Черепанов С.И. Проблемы эффективности методов государственного управления в Российской Федерации // Наука. Мысль: электронный периодический журнал. 2017. Т. 7. № 6. С. 106-112.
7. Mzokov A.R. The global financial market: the analysis of current financial events // World Ecology Journal. 2017. Т. 7. № 6. С. 76-82.

# Mixed problem for a model locally loaded parabolic equation in a three-layer medium: economics aspects

**Maya A. Magomaeva**

PhD in Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor,
Grozny State Oil Technical University
named after Academician M.D. Millionschikov,
364051, 100, Kh.A. Isaev ave., Grozny, Russian Federation;
e-mail: uspeeva@mail.ru

**Akhmed M. Gachaev**

PhD in Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor,
Grozny State Oil Technical University
named after Academician M.D. Millionschikov,
364051, 100, Kh.A. Isaev ave., Grozny, Russian Federation;
Head of the Department of higher and applied mathematics,
Complex Scientific Research Institute named after H.I. Ibragimov
of the Russian Academy of Sciences,
366002, 21-a, Staropromyslovskoe highway, Grozny, Russian Federation;
e-mail: uspeeva@mail.ru

**Abstract**

In this paper, we study a boundary value problem for a system of loaded differential equations of the parabolic type, which describes the motion of underground water in a three-layer reservoir consisting of two weakly permeable layers connected by a well-permeable layer. The conditions for the existence and uniqueness of the solution of the problem under consideration are found. The result can be used in solving applied problems, for example, problems of forecasting and regulating the ground water level in the territory under development. The problems of forecasting and regulating the level of ground water, the content of moisture and salt in the soil of the soil in the reclaimed territory, modeling of various biological processes and phenomena lead to a class of differential and integro-differential equations, called loaded equations. Loaded equations also arise in the theory of inverse problems and the mathematical theory of optimal processes. Therefore, the study of boundary value problems for partial differential equations, and, in particular, for locally and nonlocally loaded second-order equations of the parabolic type, is of considerable theoretical and practical interest. Problems related to the process of underground water filtration belong to boundary value problems for differential equations of mainly parabolic type. In the case of a complex structure of the aquifer, the calculation scheme is presented as a set of layers, the mathematical model of which is a system of two-dimensional equations, since aquifers in a complex thickness have, as a rule, non-compatible pressures. It is assumed that horizontal filtration takes place in well-conducting layers, and vertical filtration, which causes the flow between layers, occurs in the interlayers.

**For citation**

Magomaeva M.A., Gachaev A.M. (2021) Smeshannaja zadacha dlja model'nogo lokal'no-nagruzhennogo uravnenija parabolicheskogo tipa v trehslojnoj srede: jekonomicheskie aspekty [Mixed problem for a model locally loaded parabolic equation in a three-layer medium: economics aspects]. 54-62. DOI: 10.34670/AR.2021.66.28.008

**Keywords**

Boundary value problem, mathematical model, system of differential equations, fractional differential equations, fractional derivative in the sense of Riemann-Liouville, partial differential equations, integro-differential equations, groundwater filtration, aquifers.

## References

1. Bicadze A. V. Uravnenija matematicheskoj fiziki. – M.,1982.
2. Fridman A. Uravnenija s chastnymi proizvodnymi parabolicheskogo tipa. – M.: MIR, 1968.
3. Il'in A. M., Kalashnikov A.S., Olejnik O.A. Linejnye uravnenija vtorogo porjadka parabolicheskogo tipa. – UMN, 1962, vyp. 3 (105), T.12.
4. Nahushev A. M. Nagruzhennye uravnenija. – differencial'nye uravnenija,1983, T. 1, №1, s. 8-94.
5. Magomaeva M. A. Ob odnom nagruzhennom uravnenii parabolicheskogo tipa s razryvnymi kojefficientami i ego prilozhenie k dolgosrochnomu prognozu urovnja gruntovyh vod. Sbornik tezisov vserossijskogo s#ezda jekologov. – Groznyj, 2017.
6. Samojljuk R.N., Cherepanov S.I. Problemy jeffektivnosti metodov gosudarstvennogo upravlenija v Rossijskoj Federacii // Nauka. Mysl': jelektronnyj periodicheskij zhurnal. 2017. T. 7. № 6. S. 106-112.
7. Mzokov A.R. The global financial market: the analysis of current financial events // World Ecology Journal. 2017. T. 7. № 6. S. 76-82.