

УДК 336(075)

DOI: 10.34670/AR.2021.59.17.009

Распознавание скачкообразных изменений в поведении экономических систем

Прошунин Александр Иванович

Старший аналитик,
Группа компаний «Иннотех»,
195112, Российская Федерация, Санкт-Петербург,
Новочеркасский пр., 33, корп. 3;
e-mail: alexfrauch@gmail.com

Аннотация

В данной статье рассматривается теория катастроф применительно к анализу экономических систем. Развитие теории экономических систем, статистики и теории катастроф дает новые методы прогнозирования состояния экономических систем. Рассмотрено прогнозирование особенностей динамики временных рядов. Перечислены характерные признаки существования катастроф: модальность, катастрофические скачки, гистерезис, расхожимость. Сделан вывод о том, что для распознавания скачкообразных изменений экономических систем подходят теория катастроф и теория гладких отображений Уитни. Это способствует заблаговременному распознаванию сильных бифуркации и своевременной корректировки в стратегии. Развитие данного направления важно для малого и среднего бизнеса, который сильно реагирует даже на относительно малые колебаний в экономических показателях. Оно будет способствовать решению задачи устойчивости бизнеса.

Для цитирования в научных исследованиях

Прошунин А.И. Распознавание скачкообразных изменений в поведении экономических систем // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2021. Том 11. № 4А. С. 86-94. DOI: 10.34670/AR.2021.59.17.009

Ключевые слова

Теория катастроф, экономика, временные ряды, прогноз.

Введение

При рассмотрении экономических систем в большинстве случаев основываются на статистических данных в виде временных рядов. Временным рядом (ВР) называется случайная функция времени $x(t)$, заданная в определенные моменты времени t_1, t_2, \dots своими значениями $x_1, x_2, x_3 \dots$. Временные ряды могут быть многомерными, когда одновременно регистрируется несколько характеристик одного процесса в одинаковые моменты времени. Временные ряды широко встречаются в практике. При анализе экономических показателей используются ежедневные, еженедельные, ежемесячные, ежеквартальные и т.п. данные, например, это могут быть ежедневные данные о котировке акций, месячные данные о продаже продукции, годовые данные о ВВП и т.д. Временные ряды можно представить графически. Они могут иметь самый разнообразный вид от четко выраженной периодичности (график продаж в течении суток) до случайных колебаний на фоне монотонности изменения величины (рост урожайности) [Головинский, Суруцев, 2013].

Основная часть

Пусть имеются временные ряды x_j , зависящие от t следующим образом:

$$x_j(t_i) = x_{ji}, j = \overline{1m}, i = \overline{1n}, \quad (1)$$

Иными словами, мы анализируем выборку, включающую n элементов, по m параметров, или m временных рядов, состоящих из n элементов. Для нахождения линейной зависимости между рядами используется коэффициент корреляции

$$r_{j(j+m)} = \frac{\sum_1^n (x_{ji} - \bar{x}_j)(x_{(j+m)i} - \bar{x}_{j+m})}{\sqrt{\sum_1^n (x_{ji} - \bar{x}_j)^2 \sum_1^n (x_{(j+m)i} - \bar{x}_{j+m})^2}}, j = \overline{1m}, i = \overline{1n}, \quad (2)$$

где $\bar{x}_j = \frac{\sum_1^n x_{ji}}{n}$, $\bar{x}_{j+m} = \frac{\sum_1^n x_{(j+m)i}}{n}$ – средние значения временных рядов данной выборки.

При условии, что существует не менее одного

$$|r_{j(j+m)}| > 0,7, \quad (3)$$

можно утверждать наличие линейной зависимости данных ВР. При наличии более одной пары, удовлетворяющей условию (3), отбор производится по условию

$$|r_{j(j+m)}| \rightarrow 1, \quad (4)$$

Так как ВР линейно зависимы и выполнены условия (3) и (4), то применима и теория Ляпунова об устойчивости движения.

Напомним определение устойчивости возмущенного движения по Ляпунову. Нулевое решение $x(t) \equiv 0$ возмущенной системы $\dot{x} = f(x)$ называют устойчивым, если для

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall t > 0:$$

$$||x(0)|| < \delta \Rightarrow ||x(t)|| < \varepsilon, 0 \leq t < \infty. \quad (5)$$

Иными словами, устойчивость по Ляпунову говорит об устойчивости траекторий движения, представленных на рис. 1, и показывает зависимость значения траекторий между ВР в нашем случае. Данный случай справедлив тогда, когда

$$r_{j(j+m)} \rightarrow 1, \quad (6)$$

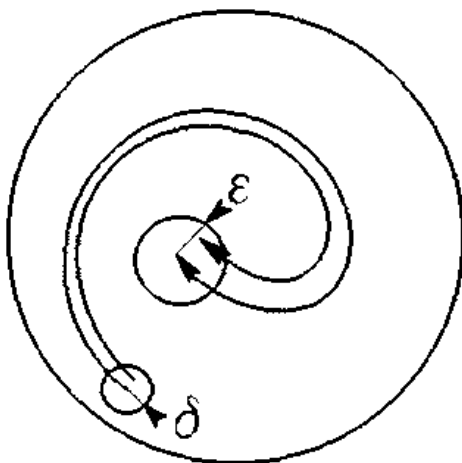


Рисунок 1 – Устойчивость по Ляпунову

$$\text{В случае, когда } r_{j(j+m)} \rightarrow -1, \quad (7)$$

наблюдается антикорреляция ВР, то теорема о устойчивости также применима (рис. 2).

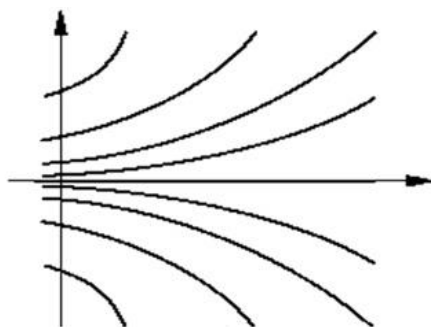


Рисунок 2 – Асимптотическая устойчивость для случая антикорреляции

В случае выполнения условий линейной зависимости ВР можно утверждать о выполнении условий устойчивости по Ляпунову, следовательно, в будущие моменты времени ВР имеет зависимость в изменении, скорости изменения. Причем чем сильнее выполняется условие (4), тем сильнее зависимость в поведении ВР рядов.

Обычно теория временных имеет дело с плавными изменениями случайных величин. Однако для прогнозирования значительный интерес представляют скачки.

Математическая теория катастроф направлена на разработку математических моделей катастроф – самых разных явлений скачкообразного изменения функционирования системы в ответ на плавное изменение внешних условий, имеющих некоторые общие черты. Объектом

теории катастроф являются разрывные переходы систем из одного состояния в другое, разрывы в плавных, непрерывных процессах, внезапные качественные изменения поведения систем. Источниками теории катастроф являются теория гладких отображений Уитни и теория бифуркаций динамических систем Пуанкаре и Андронова. Бифуркация в буквальном смысле как раздвоение употребляется в широком смысле для обозначения всевозможных качественных перестроек или метаморфоз различных объектов при изменении параметров, от которых они зависят. Экономическая система – ступенчатая, многоуровневая система, и любая неопределенность, случайность во входных параметрах в нижних уровнях приводит к неопределенностям и случайностям в выходных параметрах подсистем более высокого порядка и системы в целом.

Перечислим характерные признаки существования катастроф:

– модальность – это свойство объекта системы, заключающееся в том, что при некотором значении управляющих параметров возможны несколько положений равновесия системы (несколько мод);

– катастрофические скачки – скачкообразный переход системы из одного положения равновесия в другое;

– гистерезис – переход системы из одного состояния в другое и обратно при разных значениях управляющих параметров по разным траекториям;

– расходимость – малое изменение пути в пространстве параметров приводит к качественно отличному конечному состоянию системы.

Теории гладких отображений Уитни была применима для определения катастроф. Поскольку гладкие отображения встречаются повсеместно, повсюду должны встречаться и их особенности. А поскольку теория Уитни дает значительную информацию об особенностях отображений общего положения, можно попытаться использовать эту информацию для изучения разнообразных явлений и процессов. В этой простой идее и состоит основная идея теории катастроф [Арнольд, 1990]. В теории Уитни рассматриваются отображения, т.е. наборы функций нескольких переменных. Возникающие специальные геометрические преобразования \mathbb{R} . Том назвал элементарными катастрофами. К таким геометрическим преобразованиям относится отображение поверхности на плоскость, т.е. сопоставление каждой точке поверхности точки плоскости. Отображение гладкое, если функции, задающие отображение, гладкие (дифференцируемые достаточное количество раз, например, многочлены). Точка x называется *критической точкой* функции f , если в этой точке производная функции f равна нулю.

Пусть $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ – функция, заданная формулой $y = x^2$. Точка 0 – критическая точка этой функции. Критические точки функции делятся на критические точки общего положения, или невырожденные, и вырожденные критические точки. Критическая точка гладкой функции называется *невырожденной*, если второй ^[1]_{SEP} дифференциал функции в этой точке – невырожденная квадратичная форма (рис. 3).

Рассмотрим дифференцируемое отображение $f: M^m \rightarrow N^n$. Поясним перенесения на этот случай понятия критической точки. Производная отображения f в точке x представляет собой линейное отображение касательного пространства к многообразию-прообразу в точке x в касательное пространство к многообразию-образу в точке $f(x)$:

$$f_{*x}: T_x M^m \rightarrow T_{f(x)} N^n, \quad (8)$$

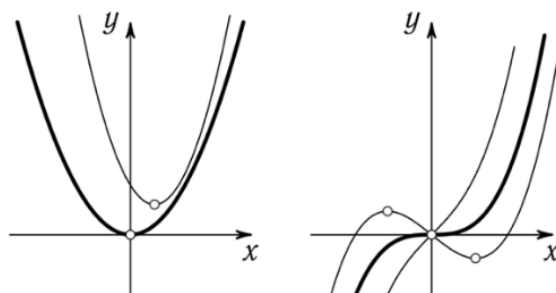


Рисунок 3 – Вырожденные и невырожденные критические точки

Отображение двумерного многообразия в двумерное устойчиво в точке тогда и только тогда, когда в подходящих локальных координатах (x_1, x_2) в прообразе и (y_1, y_2) в образе отображение записывается в одном из трех видов (рис. 4):

- 1) $y_1 = x_1, y_2 = x_2$ (регулярная точка);
- 2) $y_1 = x_1^2, y_2 = x_2$ (складка);
- 3) $y_1 = x_1^3 + x_1 x_2, y_2 = x_2$ (сборка) (рассматриваемая точка имеет координаты $x_1 = x_2 = 0$).

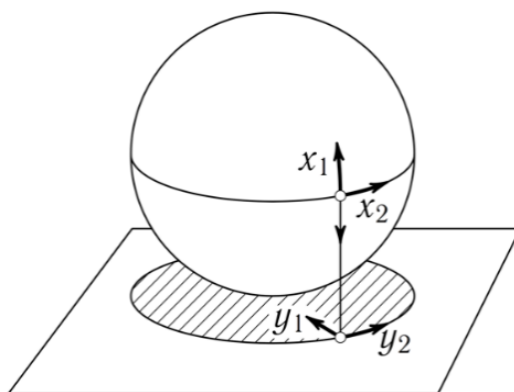


Рисунок 4 – Проекция сферы на плоскость Уитни

Иными словами, каждый устойчивый росток отображения двумерного многообразия на двумерное дифференцируемо эквивалентен одному из трех ростков отображений приведенного списка в нуле. Первый из ростков – это росток диффеоморфизма. К такому виду приводится всякое гладкое отображение двумерных многообразий в окрестности не критической точки. Особенность отображения второго типа называется складкой. Это отображение плоскости на плоскость можно рассматривать как семейство отображений прямой на прямую ($y_1 = x_1^2$), зависящих (тривиальным образом) от одного параметра ($y_2 = x_2$) [Арнольд, Варченко, Гусейн-Заде, 2009].

Если положение равновесия – установившийся режим в реальной системе, то при изменении параметра появляются следующие характерные явления, наблюдаемые и в поведении экономической системы:

1. После потери устойчивого равновесия установившимся режимом оказывается колебательный периодический режим. Этот вид потери устойчивости называется мягкой потерей устойчивости (рис. 5).

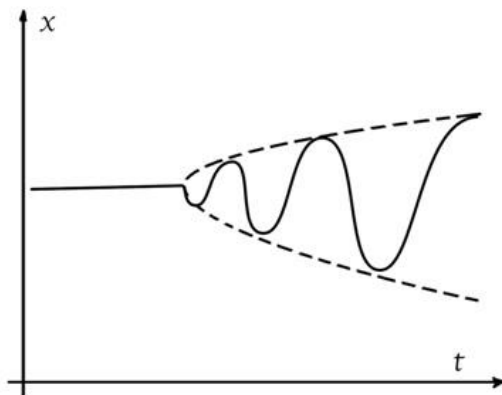


Рисунок 5 – Мягкая потеря устойчивости

2. Перед тем как установившийся режим теряет устойчивость, область притяжения этого режима становится очень малой, и всегда присутствующие случайные возмущения выбрасывают систему из этой области еще до того, как область притяжения полностью исчезает. Этот вид потери устойчивости называется жесткой потерей устойчивости. При этом система уходит из стационарного режима скачком и перескакивает на иной режим движения (рис. 6).

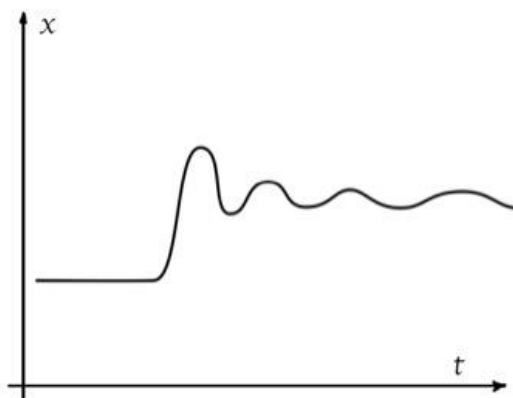


Рисунок 6 – Жесткая потеря устойчивости

Установившийся режим может быть другим устойчивым стационарным режимом, устойчивыми колебаниями или более сложным движением. Такие режимы движения получили название аттракторов, так как они «притягивают» соседние режимы (это так называемые переходные процессы). Аттрактор (от англ. to attract – притягивать) – притягивающее множество динамической системы. Компактное инвариантное подмножество фазового пространства, которое асимптотически устойчиво, устойчиво по Ляпунову, и все траектории из некоторой его окрестности стремятся к нему при $t \rightarrow \infty$. Потеря устойчивости состояния равновесия не обязательно связана с бифуркацией. Система может терять равновесие вследствие нарастания самоподдерживающихся колебаний.

Флаги катастроф представляют собой косвенные признаки, по которым можно судить о возможности или наличии катастрофы в системе. К сожалению, для экономических и производственных систем при эмпирическом рассмотрении можно с уверенностью указать

лишь один признак, флаг. Этот флаг – аномальная дисперсия. Признаком возможного приближения катастрофы является нарастание дисперсии или размахов колебаний величин, характеризующих систему. Этот флаг, как известно, успешно используется при статистическом регулировании качества продукции в серийном и массовом производстве.

$$D = S^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n}, \quad (9)$$

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad (10)$$

где D – дисперсия случайной величины,

S – стандартное отклонение случайной величины.

Скорость изменения дисперсии (9) растет быстрее чем, среднее значение величины (10) при скачкообразном изменении (рис. 7).

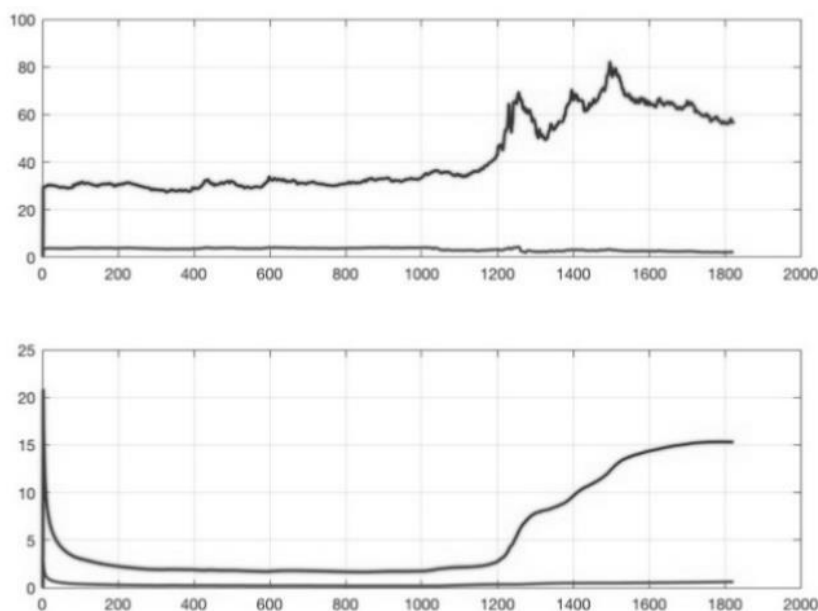


Рисунок 7 – Графики экономических показателей (верхний), графики изменений дисперсии экономического показателя

Заключение

Таким образом, можно сделать вывод, что для распознавания скачкообразных изменений экономических систем подходят теория катастроф и теория гладких отображений Уитни. Это способствует заблаговременному распознаванию сильных бифуркации и своевременной корректировки в стратегии. Развитие данного направление важно для малого и среднего бизнеса, который сильно реагирует даже на относительно малые колебаний в экономических показателях. Оно будет способствовать решению задачи устойчивости бизнеса.

Библиография

1. Арнольд В.И. Теория катастроф. 3-е изд. доп. М.: Наука, 1990. 128 с.
2. Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М. Особенности дифференцируемых отображений. 3-е изд., стереотип. М., 2009. 672 с.
3. Баринов Ю. Системный анализ видов организационных изменений // Вестник ВУиТ. 2009. № 19. С. 147.
4. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1988. 345 с.
5. Головинский П.А., Суровцев И.С. Системный анализ. Воронеж, 2013. 172 с.
6. Гончарук В.А. Развитие предприятия. М.: Дело, 2000. 112 с.
7. Масленникова Н. Цели развития организации через призму управленческих теорий // Теория и практика управления. 2002. № 6.
8. Тарасов Д.И. Модернизированная модель принятия стратегических решений SPACE // Экономика и предпринимательство. 2013. № 12. С. 854-859.
9. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. М.: Мир, 1985. 254 с.
10. Хаммер М., Чампи Дж. Реинжиниринг корпорации: Манифест революции в бизнесе. СПб., 1997. 332 с.

Recognition of sudden changes in the behavior of economic systems

Aleksandr I. Proshunin

Senior Analyst,
Group of Companies "Innotech",
195112, Saint Petersburg, Russian Federation,
Novocherkassky ave., 33, building 3;
e-mail: alexfrauch@gmail.com

Abstract

This article examines the theory of catastrophes in relation to the analysis of economic systems. The development of the theory of economic systems, statistics and the theory of catastrophes provides new methods for predicting the state of economic systems. The forecasting of the features of the dynamics of time series is considered. The characteristic signs of the existence of catastrophes are listed: modality – a property of the system object, which consists in the fact that for a certain value of the control parameters, several equilibrium positions of the system are possible (several modes); catastrophic jumps – abrupt transition of the system from one equilibrium position to another; hysteresis – a transition of the system from one state to another and vice versa at different values of the control parameters along different trajectories; divergence – a small change in the path in the parameter space leads to a qualitatively different final state of the system.. The author concludes that the disaster theory and Whitney's theory of smooth mappings are suitable for recognizing abrupt changes in economic systems. This facilitates early recognition of strong bifurcations and timely adjustments in the strategy. The development of this direction is important for small and medium-sized businesses, which reacts strongly to even relatively small fluctuations in economic indicators. It will contribute to solving the problem of business sustainability.

For citation

Proshunin A.I. (2021) Raspoznavanie skachkoobraznykh izmenenii v povedenii ekonomicheskikh sistem [Recognition of sudden changes in the behavior of economic systems]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 11 (4A), pp. 86-94. DOI: 10.34670/AR.2021.59.17.009

Keywords

Catastrophe theory, economics, time series, forecast.

References

1. Arnol'd V.I. (1990) *Teoriya katastrof* [Catastrophe theory], 3th ed. Moscow: Nauka Publ.
2. Arnol'd V.I., Varchenko A.N., Gusein-Zade S.M. (2009) *Osobennosti diffe-rentsiruemykh otobrazheniii* [Singularities of differentiable mappings], 3th ed. Moscow.
3. Barinov Yu. (2009) Sistemnyi analiz vidov organizatsionnykh izmenenii [System analysis of types of organizational changes]. *Vestnik VUiT* [Bulletin of the Volga University named after V.N. Tatishchev], 19, pp. 147.
4. Gilmore R. (1988) *Prikladnaya teoriya katastrof* [Applied theory of catastrophes]. Moscow: Mir Publ.
5. Golovinskiĭ P.A., Surovtsev I.S. (2013) *Sistemnyi analiz* [System analysis]. Voronezh.
6. Goncharuk V.A. (2000) *Razvitie predpriyatiya* [Enterprise development]. Moscow: Delo Publ.
7. Khammer M., Champi Dzh. (1997) *Reinzhening korporatsii: Manifest revolyutsii v biznese* [Corporation reengineering: Manifesto of revolution in business]. Saint Petersburg.
8. Maslennikova N. (2002) Tseli razvitiya organizatsii cherez prizmu uprav-lencheskikh teorii [Goals of development of the organization through the prism of management theories]. *Teoriya i praktika upravleniya* [Theory and practice of management], 6.
9. Tarasov D.I. (2013) Modernizirovannaya model' prinyatiya strategicheskikh reshenii SPACE [The modernized model of strategic decision-making SPACE]. *Ekonomika i predprinimatel'stvo* [Economics and Entrepreneurship], 12, pp. 854-859.
10. Tompson Dzh.M.T. (1985) *Neustoichivosti i katastrofy v nauke i tekhnike* [Instabilities and disasters in science and technology]. Moscow: Mir Publ.