

Применение рядов Фурье в определении точности обработки детали

Шихшинатова Муминат Магомедрасуловна

Кандидат физико-математических наук,
доцент,

Дагестанский государственный педагогический университет,
367000, Российская Федерация, Махачкала, ул. Магомеда Ярагского, 57;
shichmum_2006@mail.ru

Аннотация

Числовые и функциональные ряды составляют достаточно абстрактный и сложный для изучения раздел математического анализа. Видение расчетов и применение их в экономических системах, усваивается эффективнее в том случае, когда их применение сопровождается «живыми» примерами. В статье рассматривается возможность применения рядов Фурье при прогнозировании отклонений формы заготовки, исходя из геометрических очертаний детали и кинематики технологической системы.

Суммарная погрешность при механической обработке обуславливается действием всех ранее перечисленных первичных погрешностей и определяет величину технологического допуска на рассматриваемую поверхность. Методика расчета суммарной погрешности зависит от метода достижения точности (от типа производства) и метода расчета.

Случайные погрешности при обработке полностью устранить не предоставляется возможности, поэтому стараются их максимально уменьшить. Одним из простых способов уменьшения случайных погрешностей является непосредственное измерение размеров и твердости заготовок перед их обработкой с последующей сортировкой их на группы. При обработке каждой группы вносится необходимая поправка в размер статической настройки станка, учитывающая величину упругих отжатию технологической системы.

Для цитирования в научных исследованиях

Шихшинатова М.М. Применение рядов Фурье в определении точности обработки детали // Экономика: вчера, сегодня, завтра. 2019. Том 9. № 1А. С. 556-563.

Ключевые слова

Ряды Фурье, дифференциальные уравнения, эллиптические уравнения, частные производные, отклонение формы.

Введение

Например, при определении и прогнозировании отклонений формы заготовки в Определении отклонений формы от заданных конструктором значений в пределах допуска на выполняемый размер, а также отклонений, величина которых выходит за установленные границы поля допуска, может осуществляться по схеме, предложенной в [Воробьев, 1988, 408].

Прежде всего, выводится соотношение, которое связывает функцию, описывающую геометрическое состояние деформированного тела, с приложенными к нему нагрузками. Например, при механической обработке - это радиальная составляющая силы резания P_y , при сборке соединения с натягом - осевая сила P_x [Моргунов, 2004, 298]. Это соотношение содержит помимо самой функции состояния, еще и ее производные, а также некоторые интегральные характеристики.

Затем, исходя из геометрических очертаний обрабатываемой заготовки и кинематики технологической системы, ограничивающей перемещение инструмента и заготовки, выбирается ортогональная система функций, по которой указанная функция состояния при резании разлагается в ряд Фурье, а при сборке неподвижного соединения в ряд Тейлора.

Материалы и методы

Рассмотрим взаимоотношение сил резания и отклонений формы заготовки при механической обработке. Воспользуемся теоремой сходимости рядов Фурье.

Если заданная на сегменте $[-\pi, \pi]$ функция f разлагается в ряд Фурье

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad (1)$$

удовлетворяет условиям

$$f(-\pi) = f(\pi), \quad (2)$$

$$f'(-\pi) = f'(\pi) \quad (3)$$

и имеет абсолютно интегрируемую на $[-\pi, \pi]$ (например, ограниченную) вторую производную

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)| dx \leq c, \quad (4)$$

то ряд Фурье функции f сходится на $[-\pi, \pi]$ равномерно и абсолютно.

При токарной обработке заготовка – тело вращения может быть представлена в виде балки с сосредоточенной нагрузкой P_y от резца (рис. 1). В случае точения наружной поверхности тонкой заготовки дополнительным изгибающим моментом от осевой составляющей можно пренебречь. При обработке полый заготовки (трубы) или сплошной учитывается момент P_x .

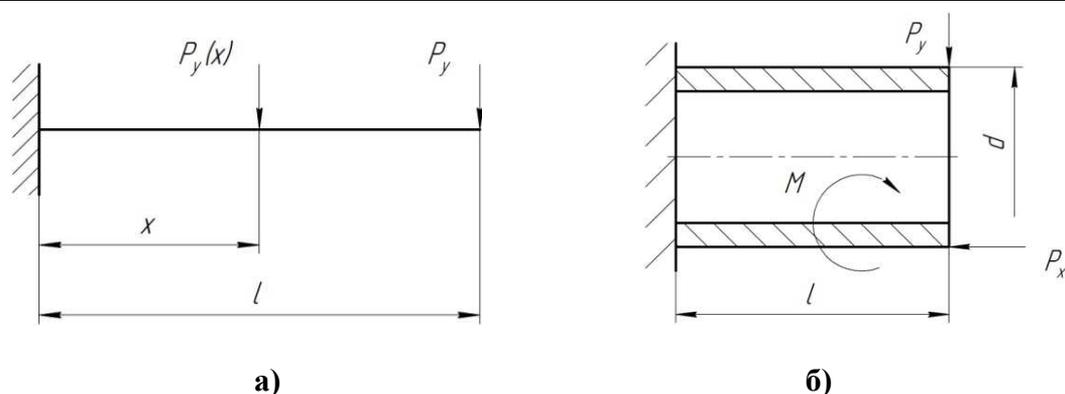


Рисунок 1 – Схема нагружения заготовки при точении

а) сосредоточенная нагрузка P_y , изгибающий момент $M_{max} = P_y l$;

б) изгибающий момент $M_{max} = P_y l + P_x d$.

В то же время резец изгибается под действием главной составляющей силы резания P_z и осевой составляющей P_x .

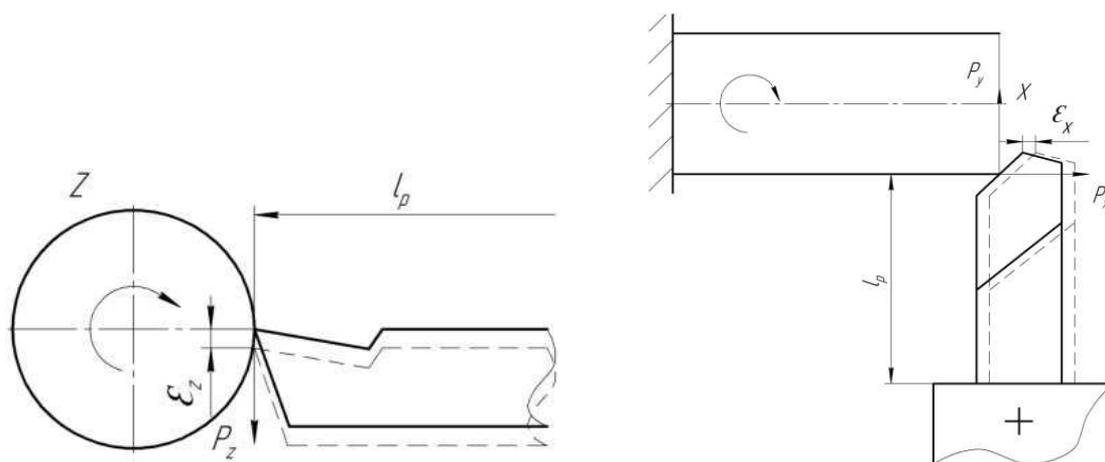


Рисунок 2 – Изменение положения резца под действием силы резания

На рисунке 2 показаны сплошной линией положение резца настроечное, пунктирной – положение резца в результате действия составляющей силы резания P_z и; ϵ_z и ϵ_x – отклонения лезвия резца по z и x .

Вертикальное перемещение точки балки с абсциссой x обозначим через $z(x)$. Положительным на оси z будем считать направление вниз. Однако? заготовка, вращаясь относительно оси ox , в процессе обработки в результате воздействия радиальной составляющей силы резания P_y , изгибается в направлении действия силы по нормали к поверхности. Упругая деформация заготовки и инструмента приводит к появлению отклонений формы заготовки либо в границах поля допуска, назначенного конструктором, либо вне их. В обоих случаях при закреплении в центрах (балка на двух опорах) заготовка приобретает форму бочки. Кроме того, наличие микроотклонений на поверхности заготовки заставляет режущий инструмент упруго деформироваться под влиянием радиальной составляющей силы резания P_y , в результате этого на обработанной поверхности появляются микроотклонения, наследованные от микронеровностей, имеющих на поверхности до выполнения данной обработки.

Результаты и обсуждения

Рассмотрим деформацию заготовки без учета влияния микроотклонений. В процессе обработки заготовка прогибается под действием силы резания на определенную величину Δy (рис. 3) под углом φ .

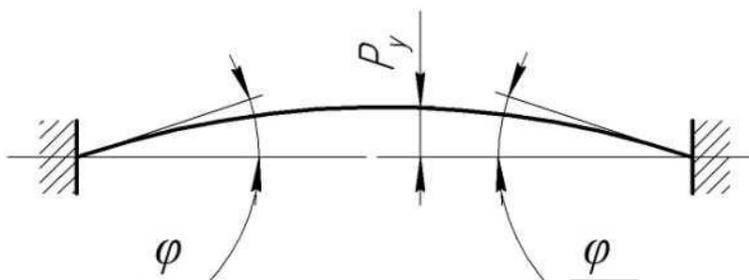


Рисунок 3 – Деформация заготовки под действием силы резания

Этот угол является некоторой функцией изгибающего момента $M = P_y \cdot \Delta y$

$$\varphi = \varphi(M). \quad (5)$$

Предположим, что φ линейно зависит от M , т.е.

$$\varphi = kM. \quad (6)$$

Это предположение соответствует закону Гука о пропорциональности деформаций усилиям.

Из курса сопротивления материалов

$$k = \frac{l}{EI}, \quad (7)$$

где l – длина изгибаемой балки, I – момент инерции ее поперечного сечения относительно горизонтальной прямой, лежащей в плоскости этого сечения и проходящей через его центр тяжести, а E – модуль Юнга материала балки. Опуская пояснения, связанные с выводом (7), изложенные в [Воробьев, 1988, 408], заметим, что кривизна изогнутой балки в некоторой точке x зависит только от изгибающего момента $M(x)$ в этой точке и не зависит от того, какими будут его значения в остальных точках балки, т.е. функция прогиба $v(x)$ балки связана с действующим в балке изгибающим моментом $M(x)$ дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2 \varphi(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} \quad (8)$$

Запишем также без вывода дифференциальное уравнение изгиба балки

$$EI \frac{d^4 v}{dx^4} = q(x). \quad (9)$$

Если бы заготовка была идентична балке с левым концом в $x=0$ и правым в $x=l$ и свободно опертую на опоры своими концами, то функция прогиба v , являясь непрерывной функцией, согласно теореме Дирихле, может быть разложена в ряд Фурье по синусам, который везде сходится к этой функции.

Для случая сосредоточенной нагрузки (рис.5)

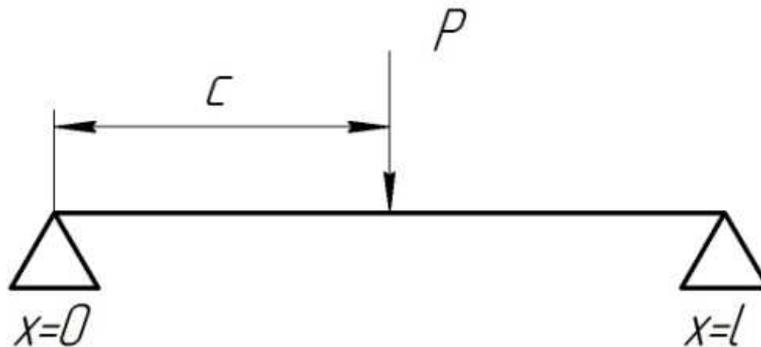


Рисунок 5 – Производная функция прогиба по длине балки есть тангенс угла поворота φ ее поперечного сечения

$$v_p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \frac{2}{\pi^4} \frac{Pl^2}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \sin \frac{n\pi}{l} c \sin \frac{n\pi}{l} x. \quad (10)$$

Отождествляя тангенс угла поворота с самим углом, получим

$$\varphi_p(x) = \frac{2}{\pi^3} \frac{Pl^2}{EI} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{(2r+1)^3} \sin \frac{(2r+1)\pi}{l} x. \quad (11)$$

Стоящий в (10) ряд сходится весьма быстро, и для практических целей достаточно в нем учитывать малое число членов.

$$v_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (12)$$

Приближаясь к рассмотрению возможности применения разложения функции прогиба обрабатываемой заготовки в ряд Фурье, т.е. в том случае, когда на балку (заготовку) действует пошагово нагрузка R из сил $P_{y1}, P_{y2} \dots P_{yk}$, прикладываемых соответственно с абсциссами $x = c_1 \dots c_k$, можем искать коэффициент разложения

$$v_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

при помощи метода наложения, т.е. на основе соотношения

$$M_R(x) = \sum_{i=1}^k M_{P_{yi}}(x).$$

Если предположить, что

$$M_{P_{yi}}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} m_{i,n} \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

$$M_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{R,n} \sin \frac{n\pi}{l} x,$$

то из (12) будет следовать

$$m_{R,n} = \sum_{i=1}^k m_{i,n}.$$

Тогда

$$m_{i,n} = \frac{2lP_{yi}}{(n\pi)^2} \sin \frac{n\pi}{l} c_i,$$

так что

$$m_{R,n} = \frac{2l}{(n\pi)^2} \sum_{i=1}^k P_{yi} \sin \frac{n\pi}{l} c_i,$$

Поэтому

$$b_{R,n} = \frac{2}{\pi^4} \frac{l^3}{EI} \frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^k P_{yi} \sin \frac{n\pi}{l} c_i$$

Получим

$$v_R(x) = \frac{2}{\pi^4} \frac{l^3}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^4} \sum_{i=1}^k P_{yi} \sin \frac{n\pi}{l} c_i \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

Таким образом, можно найти коэффициент разложения $v_k(x)$ и величину прогиба балки (заготовки - тела вращения) под действием радиальной составляющей P_y силы резания пошагово при скорости продольной подачи инструмента, измеряемой как в миллиметрах на оборот заготовки, так и в метрах в минуту.

Аналогично определяется величина отклонений формы невращающейся заготовки в зависимости от прогиба державки вращающегося инструмента (свёрла, фрезы, протяжки для наружного протягивания), прогнозируя точность обработки на этапе технологической подготовки производства.

Заключение

Таким образом, применяя теорию рядов, представляется возможным значительно уменьшить объем экспериментальных исследований и даже исключить вовсе при определении величины деформаций, возникающих под действием внешних нагрузок, коими являются сила резания при лезвийной и абразивной обработке и сила протягивания при сборке неразъемных соединений.

Библиография

1. Воробьев Н.Н. Теория рядов: Учебное пособие для вузов. М.: Наука, – 1988. - 408 с.
2. Моргунов А.П., Масыгин В.Б., Ревина И.В. Технологическое обеспечение прочности профильных неподвижных соединений. Монография. М.: Технология машиностроения, – 2004. – 298 с.
3. K. Dzhaparidze, H. van Zanten, “Krein’s spectral theory and the Paley–Wiener expansion for fractional Brownian motion”, *Ann. Probab.*, 33:2 (2005), 620–644
4. M. B. Marcus, G. Pisier, *Random Fourier series with applications to harmonic analysis*, *Ann. of Math. Stud.*, 101, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1981, v+151 pp.
5. S. Ronsin, H. Biermé, L. Moisan, “The Billard theorem for multiple random Fourier series”, *J. Fourier Anal. Appl.*, 23:1 (2017), 207–228
6. G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, *Stable non-Gaussian random processes. Stochastic models with infinite variance*, *Stochastic Model.*, Chapman & Hall, New York, 1994
7. L. Drewnowski, “Topological rings of sets, continuous set functions, integration. III”, *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 20:6 (1972), 439–445
8. В. Н. Радченко, Интегралы по общим случайным мерам, *Тр. Ин-та матем. НАН Украины*, 27, Ин-т матем. НАН Украины, Киев, 1999 *Теория вероятн. и ее примен.*, 54:1 (2009) англ. пер.: V. N. Radchenko, “Sample functions of stochastic measures and Besov spaces”, *Theory Probab. Appl.*, 54:1 (2010), – 160-168 с.
9. L. Carleson, “On convergence and growth of partial sums of Fourier series”, *Acta Math.*, 116:1 (1966), 135–157 *MathSciNet ZentralMATH blatt*
10. V. Radchenko, “Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure”, *Studia Math.*, 194:3 (2009), 231–251 *MathSciNet ZentralMATH blatt*
11. V. M. Radchenko, “Approximation of integrals with respect to a random measure by integrals with respect to a real measure”, *Theory Probab. Math. Statist.*, 55 (1997), 177–179 *MathSciNet ZentralMATH blatt*

The use of fourier series in the definition of precision machining parts

Muminat M. Shikhshinatova

PhD in Physical and Mathematical Sciences,

Associate Professor,

Dagestan State Pedagogical University,

367000, 57, Magomeda Yaragskogo st., Makhachkala, Russian Federation;

shichmum_2006@mail.ru

Annotation

Numerical and functional series are quite abstract and difficult to study section of mathematical analysis. The program of higher mathematics for engineering specialties is more effective when the course of lectures is accompanied by "live" examples. The article considers the possibility of using Fourier series in predicting deviations of the workpiece shape, based on the geometric outlines of the details and kinematics of the technological system.

The total error in machining is due to the action of all the previously listed primary errors and determines the value of the technological tolerance on the surface in question. The method of calculating the total error depends on the method of achieving accuracy (on the type of production) and the method of calculation.

Random error during processing to completely eliminate the opportunity, so trying to minimize. One of the simple ways to reduce random errors is to directly measure the size and hardness of the workpieces before processing them, and then sort them into groups. When processing each group, the necessary correction is made to the size of the static adjustment of the machine, taking into

account the amount of elastic squeezing of the technological system. This correction can be made manually or automatically. The disadvantage of adjustment in this method is the difficulty of carrying out small displacements of the nodes of the machine in its possibility for adjustment.

For citation

Shikhshinatova M.M. (2019) Primenenie ryadov fur'e v opredelenii tochnosti obrabotki detali [The use of fourier series in the definition of precision machining parts]. *Ekonomika: vchera, segodnya, zavtra* [Economics: Yesterday, Today and Tomorrow], 9 (1A), pp. 556-563.

Keywords

Fourier series, differential equations, elliptic equations, partial derivatives, shape deviation.

References

1. Vorobiev, N.N. (1988), Series Theory: Textbook for universities [Teoriya ryadov: Uchebnoye posobiye dlya vuzov], M.: Science, 408 p.
2. Morgunov, A.P., Masyagin, V.B., Revina, I.V. (2004), Technological support of the strength of the fixed fixed joints. Monograph [Tekhnologicheskoye obspecheniye prochnosti profil'nykh nepodvizhnykh soyedineniy. Monografiya], M.: Mechanical Engineering, 298 p.
3. K. Dzhaparidze, H. van Zanten, "Krein's spectral theory and the Paley–Wiener expansion for fractional Brownian motion", *Ann. Probab.*, 33:2 (2005), 620–644
4. M. B. Marcus, G. Pisier, Random Fourier series with applications to harmonic analysis, *Ann. of Math. Stud.*, 101, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.; Univ. of Tokyo Press, Tokyo, 1981, v+151 pp.
5. S. Ronsin, H. Biermé, L. Moisan, "The Billard theorem for multiple random Fourier series", *J. Fourier Anal. Appl.*, 23:1 (2017), 207–228
6. G. Samorodnitsky, M. S. Taqqu, Stable non-Gaussian random processes. Stochastic models with infinite variance, *Stochastic Model.*, Chapman & Hall, New York, 1994
7. L. Drewnowski, "Topological rings of sets, continuous set functions, integration. III", *Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 20:6 (1972), 439–445
8. V. N. Radchenko, Integrals over General random measures, *Tr. In-TA Matem. NAS of Ukraine*, 27, In-t Mat. National Academy of Sciences of Ukraine, Kyiv, 1999, Theory likely. and its applied., 54: 1 (2009) eng. per.: V. N. Radchenko, "Sample functions of stochastic measures and Besov spaces", *Theory Probab. Appl.*, 54:1 (2010), – 160-168 c.
9. L. Carleson, "On convergence and growth of partial sums of Fourier series", *Acta Math.*, 116:1 (1966), 135–157 MathSciNet ZentralMATH blatt
10. V. Radchenko, "Mild solution of the heat equation with a general stochastic measure", *Studia Math.*, 194:3 (2009), 231–251 MathSciNet ZentralMATH blatt
11. V. M. Radchenko, "Approximation of integrals with respect to a random measure by integrals with respect to a real measure", *Theory Probab. Math. Statist.*, 55 (1997), 177–179 MathSciNet ZentralMATH blatt